ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom LV, numer 2 – 2007

KRZYSZTOF WÓJTOWICZ

DOWÓD MATEMATYCZNY Z PUNKTU WIDZENIA FORMALIZMU MATEMATYCZNEGO

CZĘŚĆ II

1. *GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE* HILBERTA

Freudenthal nazywa Pascha „ojcem ścisłości w geometrii" (FREUDENTHAL 1962, 619). Rzeczywiście, poglądy Pascha dotyczące geometrii utrzymane są w duchu bardzo rygorystycznym. Jego zdaniem odwołania do intuicji w dowodzie geometrycznym świadczą o tym, że dowód ten zawiera luki – dowody winny bowiem dać się zrekonstruować w czysto formalny sposób. Proces dowodzenia powinien zaś mieć charakter zobiektywizowany i wolny od elementów wyobrażeniowych.

Postulowany przez Pascha ideał ścisłości znajduje swoją realizację w pracach Hilberta. W *Grundlagen der Geometrie* (1899) Hilbert skonstruował (wykorzystując techniki geometrii analitycznej) model dla aksjomatów geometrii klasycznej i – mówiąc dzisiejszym językiem – wykazał w ten sposób semantyczną niesprzeczność tej aksjomatyki. Co więcej, w ten sam sposób podał szereg modeli dla różnych aksjomatyk: takich, w których jeden z aksjomatów był fałszywy, pozostałe zaś prawdziwe. W ten sposób Hilbert wykazał niezależność aksjomatów od siebie. Terminy geometryczne (punkt, prosta etc.) były interpretowane jako liczby (n-tki liczb) bądź zbiory liczb (n-tek liczb); nie była przy tym konieczna wizualizacja ani intuicyjne przedstawienie sobie tych obiektów. Jest to procedura faktycznie bardzo odległa od intuicyjnych rozumowań, odwołujących się do naszego rozumienia prze-

Dr hab. KRZYSZTOF WÓJTOWICZ, prof. SWPS – Instytut Filozofii Szkoły Wyższej Psychologii Społecznej (SWPS); adres do korespondencji: ul. Chodakowska 19/31, 03-815 Warszawa; e-mail: kwojtowicz@swps.edu.pl

strzeni[1]. Hilbert realizuje program, w ramach którego rola intuicji przestrzennej zostaje zredukowana do roli czysto pomocniczej, natomiast intuicyjna interpretacja terminów geometrycznych nie jest konieczna do prowadzenia dowodów. Te bowiem winny mieć charakter czysto formalny.

W literaturze można spotkać stwierdzenia, że *Grundlagen der Geometrie* zadały śmiertelny cios koncepcji geometrii jako nauki o przestrzeni, opierającej się na intuicyjnych przekonaniach. Faktycznie, Hilbert nie nakłada żadnych warunków na modele dla systemu aksjomatów geometrycznych, dotyczących natury obiektów składających się na te modele. Modelem dla aksjomatów jest dowolny układ przedmiotów, który te aksjomaty spełnia[2].

Można tu mówić o pojawieniu się nowej, abstrakcyjnej koncepcji matematyki. Cechą charakterystyczną tej nowej koncepcji jest abstrahowanie od intuicyjnego znaczenia terminów i koncentracja na badaniach czysto logicznych zależności między zdaniami matematycznymi (w szczególności aksjomatami i twierdzeniami). Zdaniem Bernaysa zadaniem tych rozumowań nie jest jedynie wspomożenie naszej intuicji w badaniach dotyczących figur przestrzennych. Przeciwnie, to właśnie te czysto logiczne zależności stają się podstawowym przedmiotem zainteresowania, zaś w rozumowaniach wolno odwoływać się jedynie do tych własności, które zostały założone z jawny sposób (lub są wnioskami z założeń i aksjomatów) (BERNAYS 1967, 497).

W takim duchu uprawia geometrię Hilbert. W *Grundlagen* nie zajmuje się problemem, czym tak naprawdę jest punkt, prosta, płaszczyzna etc. – prowadzi bowiem badania w duchu aksjomatycznym (i – można powiedzieć – metamatematycznym). Charakterystyczne dla tego podejścia jest uznanie, że to dopiero aksjomaty definiują znaczenia terminów. Nie ma więc sensu pytać o to, jaka jest istota obiektów geometrycznych, z a n i m zostaną podane opisujące je aksjomaty. Można powiedzieć, że w miejsce pojęcia prawdy geometrycznej, opisującej pewne obiektywne zależności przestrzenne pojawia się pojęcie prawdy w danym systemie spełniającym aksjomaty. Zależności

[1] Znamy to ze szkoły: sprawdzenie pewnego faktu geometrycznego za pomocą technik geometrii analitycznej może się w ogóle nie wiązać z faktem, że potrafimy sobie tę geometryczną sytuację przedstawić. Z kolei korzystanie z tradycyjnych technik geometrycznych wymaga najczęściej przedstawienia sobie tej sytuacji i zrozumienia jej geometrycznych aspektów. Ten przykład można uznać za ilustrację różnicy między czysto formalnym a treściowym konstruowaniem dowodów matematycznych.

[2] W jednej z rozmów Hilbert miał powiedzieć, że przy prawidłowej aksjomatyzacji geometrii powinniśmy być w stanie zamiast o punktach, prostych i płaszczyznach, mówić o stołach, krzesłach i kuflach piwa (por. SHAPIRO 1996, 156).

logiczne między zdaniami geometrii zaczynają być badane w oderwaniu od ich zamierzonej interpretacji, jako zjawiska metamatematyczne – czy dane zdanie β jest prawdziwe w tych dziedzinach przedmiotowych[3], w których prawdziwe są inne zdania $\alpha_1,...\alpha_n$. Nie stawiamy przy tym żadnych ograniczeń dotyczących natury tych dziedzin (nie muszą więc one bynajmniej składać się z tego, co intuicyjnie określilibyśmy jako struktury geometryczne). Geometria przestaje być bowiem nauką o przestrzeni fizycznej, stając się nauką dotyczącą dowolnych dziedzin, w których prawdziwe są stosowne aksjomaty. Nawet jeśli te aksjomaty są motywowane pewnymi intuicjami, to intuicyjne rozumienie terminów geometrycznych nie jest konieczne do dowodzenia twierdzeń (choć oczywiście może być – heurystycznie – pomocne). Dziś takie ujęcie jest dla nas oczywiste, zaś teoria modeli – w której podstawowym przedmiotem badań jest właśnie zależność między zdaniami pewnego języka formalnego, a różnego typu modelami dla tych zdań – jest podstawowym działem (meta)matematyki. Jednakże prace Hilberta pojawiły się w określonym kontekście historycznym i można uznać je za przełomowe.

Ten sposób patrzenia na to, jak uprawiać matematykę, ma istotne znaczenie z punktu widzenia problemu uzasadniania w matematyce. Rygorystyczne dowody Hilberta nie opierają się oczywiście na intuicji o charakterze geometrycznym. Nie ma tu już śladu „jasnego i wyraźnego widzenia” Kartezjusza (ani kantowskiej kategorii czasu i przestrzeni), twierdzenia geometrii nie są uzasadniane przez intuicyjny wgląd, ale są dowodzone w sposób formalny, w oderwaniu od ich interpretacji. Geometria w takim ujęciu nie ma już ambicji ujmowania prawd o świecie – celem staje się raczej ustalenie metamatematycznych zależności między zdaniami geometrii. Same zaś dowody nabierają czysto formalnego charakteru, w których intuicyjne elementy są zredukowane do minimum[4].

2. POLEMIKA HILBERT–FREGE

Zdaniem Hilberta sens terminów geometrycznych może być zadany dopiero przez aksjomaty. To one precyzują sens pojęć takich jak np. „punkt”,

---

[3] Dziś powiedzielibyśmy: modelach.

[4] Należy pamiętać, że Hilbert mówi o pewnej formie intuicji, ale nie chodzi oczywiście o intuicję przestrzeni w stylu Kanta czy intuicję umożliwiającą kartezjańskie jasne i wyraźne widzenie prawd dotyczących substancji rozciągłej.

„prosta”, „płaszczyzna” etc. Aksjomaty pozwalają więc na wprowadzenie nowych terminów do matematyki w sposób niezależny od ich intuicyjnego rozumienia.

Takiemu ujęciu w zdecydowany sposób przeciwstawia się Frege. Jego zdaniem to definicje powinny wyjaśniać znaczenia używanych terminów, zadaniem aksjomatów zaś jest wyrażanie p r a w d. Według Fregego definicje przez postulaty nie wywiązują się z żadnego z tych zadań. Nie można ich uznać ani za prawdziwe definicje, ani za aksjomaty. Aksjomaty (oraz twierdzenia) nie powinny bowiem zawierać żadnych terminów, których sens nie byłby znany już uprzednio. Natomiast zdaniem Hilberta definicja przez postulaty ma jednocześnie definiować terminy i ujmować prawdy na ich temat. Hilbert twierdzi bowiem, że nie ma sensu poszukiwanie znaczeń terminów geometrycznych uprzednich w stosunku do zasad (czyli aksjomatów) opisujących podstawowe zależności między obiektami geometrycznymi (czyli – w ujęciu Hilberta – dowolnymi obiektami spełniającymi pewne zależności). W takim ujęciu nie ma w ogóle innego sposobu ustalenia znaczenia terminu niż poprzez wskazanie, jaka jest jego relacja do innych terminów. Natomiast natura obiektów, do których odnoszą się aksjomaty, nie jest ustalona – i nie jest to w badaniach matematycznych konieczne[5]. W jednym z listów do Fregego pisał, że teoria matematyczna stanowi pewnego rodzaju budowlę (rusztowanie), w którym mamy podstawowe pojęcia wraz z relacjami między nimi (por. SHAPIRO 1996, 162). Taki sposób myślenia jest oczywiście istotnie różny od ujęcia „treściowego”, w myśl którego mamy dostęp poznawczy do zamierzonego przedmiotu badań geometrycznych (np. do przestrzeni fizycznej). Frege uważał, że geometria ma pewien przedmiot badań, którym jest przestrzeń, Hilbert zaś badał logiczne konsekwencje aksjomatów, które uważał za uwikłane definicje pojęć geometrycznych. Dopuszczał wprowadzanie pojęć w sposób czysto aksjomatyczny, bez uwzględniania ich ewentualnej interpretacji. Nadanie interpretacji nie jest konieczne do posługiwania się fragmentem języka. A zatem pewne fragmenty języka matematycznego mogą odgrywać ważną rolę w rozumowaniach matematycznych, pomimo że nie zostały wprowadzone na kanwie rozważań treściowych, wywodzących się z jakiejś formy matematycznej intuicji, ale ponieważ spełniają pewne warunki formalne. Nie jest konieczne żadne preteoretyczne, intui-

[5] Shapiro zauważa, że jest to punkt widzenia bliski poglądom współczesnych strukturalistów, których zdaniem nie można mówić o własnościach wewnętrznych obiektów matematycznych, a jedynie o ich relacji do innych obiektów z danej struktury matematycznej (SHAPIRO 2005).

cyjne rozumienie tych pojęć, aby wolno nam było się nimi posługiwać. Jedynym kryterium jest tu niesprzeczność postulatów charakteryzujących sens pojęć – poza tym swoboda matematyka nie jest niczym skrępowana. Dopuszczalne jest więc wprowadzenie na drodze aksjomatycznej nowych pojęć (i postulatów charakteryzujących te pojęcia), jeśli tylko w ten sposób do systemu nie zostanie wprowadzona sprzeczność.

3. STANOWISKO FREGEGO WOBEC FORMALIZMU

Polemika Hilberta z Fregem toczyła się w określonej sytuacji historycznej. Formalistyczne stanowisko Hilberta nie pojawia się przecież w próżni. Oprócz ważnych z punktu widzenia rozwoju geometrii prac Pascha warto wspomnieć o takich radykalnych formalistach jak np. Heine czy Thomae. Heine określał siebie jako zwolennika czysto formalnego punktu widzenia (*rein formalen Standpunkt*), w ramach którego traktował liczby jako pewnego rodzaju empirycznie uchwytne znaki – co pozwalało na uchylenie wszelkich metafizycznych problemów związanych z istnieniem tych liczb. Zdaniem Heinego, główny nacisk należy więc położyć na operacje obliczeniowe, „zaś dla liczb muszą zostać ustalone w taki sposób, aby stanowiły podstawę dla definicji takich operacji” (HEINE 1872, 173, cyt. za: DETLEFSEN 2005, 300). Heine wychodzi od motywacji epistemologicznych; jego zdaniem w ujęciu formalistycznym problem wiedzy matematycznej staje się łatwy do rozwiązania (skoro wiedza ta dotyczy tylko operacji formalnych na symbolach). Podobny punkt widzenia reprezentował Thomae, który za wielką korzyść formalistycznego punktu widzenia uważał możliwość odrzucenia wszelkich trudności metafizycznych (THOMAE 1898, 3).

Frege zdecydowanie odrzuca taki punkt widzenia, w myśl którego działalność matematyczna polega na manipulowaniu symbolami pozbawionymi znaczenia. Jego krytyka stosuje się zarówno do poglądów Heinego czy Thomae, ale też Hilberta. W FREGE 1903, § 88 cytowane są uwagi Thomae, w których ten mówi o „szachowym” modelu uprawiania matematyki, w myśl którego matematyka to gra symboli zgodnie z pewnymi regułami: „Formalna koncepcja liczb [...] nie zadaje pytań, czym są liczby [...] ale raczej jakie warunki na nie nakładamy w arytmetyce. Dla formalisty, arytmetyka jest grą znaków, które możemy określić jako puste. Oznacza to, że nie mają one innej treści (w trakcie tej obliczeniowej gry), niż jest im przypisana poprzez ich zachowania zgodnie z pewnymi regułami ich zestawiania (regułami gry).

Gracz w szachy w podobny sposób używa figur; przypisuje im pewne własności ustalające ich własności w trakcie gry. [...] Oczywiście, jest ważna różnica między arytmetyką i szachami. Reguły gry w szachy są dowolne, reguły arytmetyki [...] pozwalają na wzbogacenie naszej wiedzy o świecie" (THOMAE 1898, § 1-11; cyt. za: SHAPIRO 2000, 147).

Frege zdecydowanie przeciwstawia się takiemu punktowi widzenia, jego argumentację zaś można przedstawić w następujący sposób: jeśli uznamy, że faktycznie wyrażenia arytmetyczne są pozbawione pozajęzykowego odniesienia, tym samym musimy uznać, że stwierdzenia arytmetyczne nie mogą wyrażać żadnych treści. Jednakże wówczas arytmetyka nie może być nigdzie zastosowana – i tym samym nie można uznać jej za naukę. Tak właśnie jest w przypadku szachów: nie stanowią one nauki, bo nie wyrażają myśli. Nie można „wiedzy szachowej" zastosować do innych dziedzin. Inaczej jednak jest w przypadku arytmetyki: zdania arytmetyczne wyrażają myśli, nie są jedynie zbiorami symboli, które przekształcamy zgodnie z jakimiś arbitralnymi regułami. „To stosowalność podnosi arytmetykę do rangi nauki" (FREGE 1903, § 91).

Z punktu widzenia tego artykułu ważniejszy od problemu stosowalności jest problem statusu, jaki formalista przypisuje rozumowaniom matematycznym. W myśl stanowiska formalizmu rozumowania matematyczne mogą mieć charakter czysto symboliczny, natomiast ich (ewentualna, ale niekonieczna) interpretacja stanowi akt zewnętrzny w stosunku do samych badań matematycznych, a mimo to rozumowania prowadzone z użyciem pozbawionego interpretacji języka mają walor poznawczy[6]. Jednakże, zdaniem Fregego, rozumowania nie mogą mieć czysto symbolicznego charakteru. Winny być więc oparte na przesłankach, które są czymś więcej niż tylko zbiorami niezinterpretowanych symboli (którymi manipulujemy zgodnie z pewnymi regułami). Rozumowania mają więc – w gruncie rzeczy – charakter treściowy, a nie li tylko czysto formalny: „[W]nioskowanie nie składa się z symboli. Możemy jedynie powiedzieć, że przejście od jednej grupy symboli do drugiej może sprawiać wrażenie, jak gdyby dane nam było pewne wnioskowanie. Jednak wnioskowania nie przynależą po prostu do królestwa znaków; stanowią raczej uzasadnienie sądu oparte o pewne prawa logiki w oparciu o pewne uprzednio zaakceptowane przesłanki. Każda z tych przesłanek wy-

[6] Por. uwagi Peacocka, dotyczące interpretowania pojęć matematycznych po skończonym rozumowaniu, i abstrahowaniu od nich w trakcie samego rozumowania. Pogląd taki można odnaleźć już u Berkeleya.

raża określoną myśl uznaną za prawdziwą, zaś wniosek polega na tym, że pewna określona myśl zostanie uznana za prawdziwą [...] Czym jest wnioskowanie formalne? Możemy powiedzieć, że w pewnym sensie każde wnioskowanie jest formalne gdyż odbywa się zgodnie z pewnymi ogólnymi prawami wnioskowania; w innym sensie każde wnioskowanie jest nieformalne, gdyż zarówno przesłanki, jak i wniosek mają pewną myślową treść, których połączenie ujawnia się tylko w tym wnioskowaniu" (FREGE 1906, 387; cyt. za: DETLEFSEN 2005, 302).

Zdaniem Fregego pseudoaksjomaty nie wyrażają myśli, więc nie mogą zostać uznane za przesłanki. Przesłankami mogą być bowiem jedynie pewne myśli wyrażane przez te symbole. Jednakże jeśli są to pseudoaksjomaty, to nie możemy mówić o żadnych myślach, a więc także o żadnych przesłankach (FREGE 1906, 390). Nic więc dziwnego, że Frege sprzeciwiał się Hilbertowskiemu ujęciu definicji przez postulaty. Zdaniem Fregego bowiem wprowadzane pojęcie musi mieć pewną, daną już uprzednio treść.

4. PROGRAM HILBERTA

Hilbert jest niewątpliwie najbardziej znanym przedstawicielem formalizmu matematycznego – do tego stopnia, że niektórzy wręcz utożsamiają stanowisko formalizmu ze stanowiskiem Hilberta[7]. Faktycznie, nie ulega wątpliwości, że Hilbert nadał stanowisku formalistycznemu najbardziej dojrzałą postać – zarówno od strony ideowej, jak i od strony technicznej. Jednakże poglądy Hilberta dotyczące matematyki formowały się w określonym kontekście historycznym – bujnie rozwijała się sama matematyka, powstawały abstrakcyjne jej działy (algebra czy teoria mnogości), tworzyły się zręby współczesnej logiki. Jednocześnie toczyła się ożywiona dyskusja dotycząca podstaw matematyki i statusu matematycznych rozumowań. Ważnym impul-

---

[7] Nieco przejaskrawiając, można powiedzieć że encyklopedyczne hasło „formalizm" często rozpoczyna się od słów: „Formalizm: kierunek w filozofii matematyki stworzony przez Hilberta...". Oczywiście Hilbert nadał programowi formalistycznemu dojrzałą postać, można powiedzieć, że w jawny sposób ogłosił manifest założycielski stanowiska formalistycznego jako programu w podstawach matematyki. Byłoby jednak uproszczeniem historycznym sądzić, że dopiero od czasów Hilberta w matematyce pojawił się taki sposób myślenia o matematyce. Celem tej uwagi nie jest oczywiście krytyka haseł encyklopedycznych – mają one bowiem zawsze swoją specyfikę i opierają się na uproszczeniach – ale zwrócenie uwagi na to, że poglądy Hilberta stanowią kulminację pewnego procesu historycznego, który rozpoczął się wcześniej.

sem dla rozwoju współczesnej matematyki było stworzenie przez Cantora teorii mnogości[8]. Teoria mnogości jest teorią bogatą, opartą na silnych założeniach dotyczących istnienia całej hierarchii zbiorów nieskończonych. Ta siła i ogólność teorii mnogości pozwoliła jej stać się teorią podstawową dla całej matematyki[9]. Nie można jednak powiedzieć, że teoria mnogości została powitana przez społeczność matematyków z otwartymi ramionami. Na przełomie XIX i XX wieku toczyły się dyskusje dotyczące tego, jakie metody dowodowe są w matematyce dopuszczalne i gdzie są właściwie granice matematyczności. Pojawiały się głosy postulujące arytmetyzację całej matematyki, czyli ugruntowanie wszystkich dyscyplin matematycznych na arytmetyce[10]. Teoria mnogości, ze swymi silnymi i wysoce abstrakcyjnymi założeniami, wykraczała poza akceptowane wówczas ramy uprawiania matematyki[11]. Taka rewolucja pojęciowa prowadziła do konieczności wyjaśnienia wielu kwestii, dotyczących problemów technicznych oraz metodologicznych i filozoficznych, co prowadziło do powstawania różnych propozycji dotyczących wyjaśnienia tych trudności[12]. Dyskusja toczyła się np. wokół pewnika wyboru, aksjomatu kontrowersyjnego ze względu na swój wysoce niekonstruktywny charakter[13]. Problem, w jaki sposób uprawomocnić metody mate-

[8] Niekiedy Cantora określa się wręcz mianem „ojca współczesnej matematyki”. Niezależnie od tego, czy faktycznie rola Cantora była aż tak znacząca, nie ulega wątpliwości, że powstanie teorii mnogości otworzyło przed matematyką nowe perspektywy.

[9] Mam tutaj na myśli fakt, że możliwa jest pojęciowa redukcja praktycznie całej matematyki do teorii mnogości, co nie znaczy wcale, że większość matematyków uprawia matematykę w ten sposób.

[10] Poglądy tego typu reprezentowali np. Abel, Euler, Lagrange, Gauss, Dirichlet, Kronecker czy Poincaré (por. SIEG 1984).

[11] Warto pamiętać o tym, że Cantor sięgał także do inspiracji o charakterze filozoficznym, pojęciu nieskończoności aktualnej zaś nadawał interpretacje teologiczną. To również musiało budzić opór w środowisku matematyków. (Opis religijnych motywacji Cantora można znaleźć w pracach: MURAWSKI 1984, PURKERT 1989.)

[12] Trudności te dotyczą np. przyjęcia istnienia aktualnej nieskończoności, pewnika wyboru (jako niekonstruktywnego postulatu o charakterze egzystencjalnym), uznanie istnienia zbiorów potęgowych (czyli operacji zbioru potęgowego jako operacji tworzenia nowych obiektów matematycznych) i ogólniejszego problemu redukcji pojęć matematycznych do pojęć teorii mnogości.

[13] Niebawem jednak okazało się, że pewnik wyboru umożliwia uzyskanie wielu ważnych i ciekawych wyników. Nie wnikając w szczegóły, bez niego nie dałoby się udowodnić szeregu ważnych twierdzeń matematycznych, jak np. lemat Kuratowskiego-Zorna, który jest wykorzystywany w wielu działach matematyki. Zermelo pisał więc, iż „[T]en aksjomat [...] był używany z powodzeniem w najróżniejszych częściach matematyki [...] Tak obszerne użycie tego aksjomatu może być wyjaśnione jedynie poprzez jego oczywistość [...] stanowi on z pewnością konieczne źródło zasad matematycznych” (ZERMELO 1908, 187).

matyki klasycznej pozostawał otwarty, zaś program Hilberta stanowi próbę rozwiązania tego zagadnienia.

Hilbert stał na stanowisko, że droga do wyjaśnienia pojawiających się trudności nie może prowadzić poprzez eliminację spornej, budzącej kontrowersję części matematyki[14]. Zdaniem Hilberta właściwą drogą było nie odrzucenie tych nowych metod dowodowych, ale poszukiwanie dla nich uprawomocnienia: „Gdzie tylko są jakieś widoki powodzenia, tam chcemy dokładnie badać owocne definicje i metody dedukcji. Chcemy je pielęgnować, wzmocnić i czynić użytecznymi. Z raju, który stworzył nam Cantor, nikomu nie wolno nas wypędzić. [...] Musimy ustanowić w matematyce taką samą pewność wnioskowań jaka ma miejsce w elementarnej teorii liczb, gdzie nikt nie ma żadnych wątpliwości, i gdzie paradoksy i sprzeczności powstają jedynie przez naszą nieuwagę" (HILBERT 1926, 170).

Teorię mnogości Hilbert określa jako „najwspanialszy owoc matematycznego ducha i w ogóle jedno z najwyższych osiągnięć rozumu ludzkiego" (HILBERT 1926, 167). Aby jednak móc korzystać z czystym sumieniem z całej siły jej technik, konieczne jest wyjaśnienie, jaką rolę w matematyce odgrywa pojęcie nieskończoności (i uprawomocnienie użycia tego pojęcia w matematyce). Nieskończoność (aktualna) nie ma przecież odpowiednika w świecie fizycznym, choć jest jednym z najważniejszych pojęć matematycznych (HILBERT 1926, 190). Wyjaśnienie tego zagadnienia jest ważne dla matematyki; Hilbert twierdzi nawet, że stanowi to problem poznawczy o podstawowym charakterze, wykraczającym poza samą matematykę[15].

Kluczem do osiągnięcia tego celu miało być wykorzystanie metody aksjomatycznej i osiągnięć logiki formalnej. O tym, jaka jest epistemologiczna podstawa naszego myślenia matematycznego, mówi następujący fragment: „Już [Kant] uczył, [...], że matematyka posiada treść pewną i niezależną od

---

[14] Na przykład Brouwer postulował odrzucenie niektórych założeń, na których opiera się klasyczna matematyka (chodzi o odrzucenie prawa wyłączonego środka). Jednakże tego typu propozycje prowadziłyby do osłabienia matematyki i do jej okaleczenia. Hilbert przeciwstawiał się więc takiemu sposobowi myślenia: „To, co robił Weyl i Brouwer, to nic innego, jak pójście w ślady Kroneckera! Próbują oni uratować matematykę wyrzucając z niej wszystko, co sprawia kłopot. [...] Jeśli zgodzimy się na takie propozycje, to ryzykujemy utratę wielu największych naszych skarbów" (cyt. za: MURAWSKI 1993). Warto tu także przytoczyć uwagę Hilberta dotyczącą Brouwera: „Brouwer nie dokonuje – jak sądzi Weyl – rewolucji; jest to jedynie powtórka próby puczu" (cyt. za: SMORYNSKI 1977, 823).

[15] „Definitywne wyjaśnienie natury nieskończoności stało się koniecznością nie tylko ze względu na specjalne znaczenie tej kwestii dla tej czy innej nauki, ale także dla uczczenia samego umysłu ludzkiego" (HILBERT 1926, 163; cyt. za: MURAWSKI 1993).

jakiejkolwiek logiki i że w związku z tym nigdy nie może zostać ugruntowana w oparciu o samą tylko logikę. Dlatego też próby Fregego i Dedekinda nie doprowadziły do niczego. Jako warunek wstępny stosowania wnioskowań logicznych i wykonywania operacji logicznych dane jest już coś w przedstawieniu (*in der Vorstellung*): [mianowicie] pewne pozalogiczne konkretne obiekty, które jawią się jako doświadczane bezpośrednio przed wszelkim myśleniem. [...] W szczególności w matematyce przedmiotem naszych rozważań są konkretne znaki, których kształt, [...] jest bezpośrednio jasny i rozpoznawalny" (HILBERT 1926, 170-171; tł. za: MURAWSKI 1986).

Punktem wyjścia jest więc pewnego typu intuicja, choć nie jest to intuicja Kanta czy Kartezjusza. Ta „konkretna intuicja" umożliwia dostęp poznawczy do ciągów symboli i operacji na tych symbolach. To stanowi niejako kamień węgielny teorii dowodu, która – zdaniem Hilberta – miała posłużyć jako ugruntowanie całej matematyki i stanowić miała rdzeń programu Hilberta[16].

W programie Hilberta można (oczywiście w pewnym uproszczeniu) wyróżnić trzy etapy[17]:

(1) W pierwszym z tych etapów wskazany zostanie pewien fragment matematyki, który można uznać za ugruntowany finitystycznie. Musi być on na tyle obszerny, aby dało się w nim opisać (sformalizować) operacje na skończonych ciągach znaków.

(2) Drugi krok polega na sformalizowaniu matematyki w jednym systemie formalnym. Formuły w tym systemie mają być skończonymi ciągami symboli, możliwy więc będzie ich opis za pomocą metod finitystycznych (które zostały scharakteryzowane w pierwszym etapie).

(3) Trzeci etap pracy ma polegać właśnie na udowodnieniu niesprzeczności tego systemu formalnego za pomocą niekontrowersyjnych metod finitystycznych.

Program Hilberta jest utrzymany w duchu swoistego poznawczego optymizmu. W jednej ze swoich prac Hilbert wyraża przekonanie, że każdy dobrze postawiony problem matematyczny może być rozwiązany – zgodnie z jego słynnym powiedzeniem, w matematyce nie ma żadnego *ignorabimus*. Przekonanie Hilberta można uznać za swoistą reakcję na pesymistyczne tezy dotyczące niejako wbudowanych w nasze myślenie (w szczególności naukowe)

---

[16] Jest to ujęcie zdecydowanie różne np. od poglądów Gödla, który podkreślał znaczenie swoistej nieredukowalnej, semantycznej intuicji dotyczącej pojęć matematycznych, a nie jedynie operacji na symbolach.

[17] Opis można znaleźć np. w SIMPSON 1988.

ograniczeń poznawczych. Taki pogląd, dotyczący istnienia takich ograniczeń w odniesieniu do naszej wiedzy na temat kontinuum wyrażał np. du Bois-Reymond[18]. Optymistyczne przekonania Hilberta stoją w jawnej sprzeczności z tezami tego typu[19]. Należy tutaj zauważyć, że przez rozwiązanie problemu matematycznego Hilbert rozumiał bądź udzielenie konkretnej odpowiedzi na zadane pytanie, bądź w y k a z a n i e, że taka odpowiedź nie może być znaleziona[20].

Hilbert akceptował wizję języka matematyki, w myśl której pewne fragmenty języka matematycznego mogą mieć istotne znaczenie poznawcze, mimo że nie posiadają interpretacji pozajęzykowej. Podobnie jak Berkeley, Hilbert dopuszczał w trakcie dowodzenia nowych twierdzeń dokonywanie operacji znakami, przy której abstrahujemy od interpretacji tych znaków (czy ogólniej: od treści używanych pojęć).

Przy wprowadzaniu pojęć matematycznych nie jest – zdaniem Hilberta – konieczne nadawanie im intuicyjnej, preteoretycznej interpretacji. W takim ujęciu, elementy treściowe, interpretacyjne w matematyce, we wnioskowaniach i w uzasadnieniach nowych matematycznych zasad i wyjaśnieniach znaczenia nowych matematycznych pojęć, ustępują miejsca regułom czysto formalnym. Oczywiście, taki zabieg musi mieć sens metodologiczny – ko-

---

[18] W pracy McCarty 2004 autor przedstawia ten aspekt stanowiska Hilberta, kontrastując go z poglądami Paula du Bois-Reymonda (wybitnego matematyka XIX wieku, autora wielu ważnych osiągnięć w dziedzinie równań różniczkowych, rachunku wariacyjnego, analizy funkcjonalnej i topologii). Brat Paula, Emil du Bois-Reymond był fizjologiem, który w 1872 r. sformułował tezę *ingorabimus*: nauka obarczona jest wewnętrznymi ograniczeniami, pewne problemy nie zostaną nigdy rozwiązane. Paul du Bois-Reymond reprezentował podobne stanowisko w odniesieniu do matematyki. Był przeciwnikiem arytmetyzacji matematyki i formalizmu (McCarty uważa go za bezpośredniego poprzednika Brouwera). Zdaniem du Bois-Reymonda w matematyce można wyróżnić dwie podstawowe tradycje: idealistyczną i empirystyczną, które prowadzą do zasadniczo różnych sposobów uprawiania matematyki (stanowiąc zarazem odbicie fundamentalnego problemu wszelkiej filozofii, nie tylko filozofii matematyki). Nie jest możliwe podanie rozstrzygającego argumentu na rzecz takiego lub innego sposobu patrzenia na matematykę.

[19] Kant pisał o dręczących ludzki umysł pytaniach, „których nie może uchylić, albowiem zadaje mu je własna jego natura, ale na które nie może odpowiedzieć, albowiem przewyższają one wszelką jego możność" (Kant 1957, A vii, 7). Stanowisko Hilberta w odniesieniu do tego problemu ma więc zupełnie „niekantowski" charakter.

[20] Używając dzisiejszej terminologii, można powiedzieć, że rozwiązanie problemu mogło pojawić się bądź na poziomie samej teorii, bądź na metapoziomie. Detlefsen zauważa w tym kontekście, że dopuszczenie jako rozwiązania właśnie takiej negatywnej odpowiedzi (można powiedzieć – metaodpowiedzi) rodzi pewne problemy metodologiczne: czy konieczne jest znalezienie d o w o d u braku odpowiedzi, czy też chodzi jedynie o sformułowanie pewnego a r g u m e n t u? W tym sensie nie do końca jest jasne, gdzie leży granica niewiedzy (Detlefsen 2005, 285).

nieczne jest więc zadbanie o dwa warunki: niesprzeczność systemu i owocność takiego zabiegu. Jeśli jednak te warunki będą spełnione, to nic nie stoi na przeszkodzie, aby wprowadzić dane pojęcie matematyczne.

Taka wizja matematyki jest bardzo odległa od „rozumiejącej” czy „treściowej” koncepcji dowodu (w stylu Kartezjusza). Specyficzna intuicja, umożliwiająca jasne i wyraźne „chwytanie” pojęć matematycznych (oraz ujmowanie w intelektualnym oglądzie poszczególnych kroków matematycznego rozumowania) ustępuje miejsca wizji, w której wnioskowanie o charakterze materialnym (treściowym) zostaje zastąpione przez procedury o charakterze formalnym (HILBERT 1926).

5. UWAGI KOŃCOWE

Jako podsumowanie tych rozważań dotyczących zmiany poglądów na naturę dowodu matematycznego i roli elementów intuicyjnych w dowodzeniu twierdzeń, przytoczę opinię Hahna: Twierdził on, że w związku z faktem iż intuicja okazywała się wielokrotnie bardzo zwodnicza (a oparcie się na niej prowadziło do akceptacji fałszywych twierdzeń), więc w matematyce narastał sceptycyzm co do prawomocności odwoływania się do intuicyjnych przekonań, pojawiło się dążenie do formalizacji matematyki i eliminacji elementów intuicyjnych z rozumowań matematycznych. Pojęcia matematyczne miały być wprowadzane na drodze czysto logicznych definicji, zaś dowody prowadzone za pomocą czysto logicznych środków (HAHN 1980, 93).

Hahn formułuje swoje tezy w radykalny sposób, jednak nie ulega wątpliwości, że faktycznie w matematyce nowożytnej dokonał się proces odchodzenia od intuicyjnego ujmowania matematyki na rzecz ujęcia, które możemy określić jako formalistyczne[21]. Jeśli prezentowane w pierwszej części artykułu poglądy Kartezjusza i Berkeleya uznamy za charakterystyczne dla różnych sposobów myślenia o matematyce, to niewątpliwie współcześnie dominują poglądy w stylu Berkeleya. Nie żądamy już intuicyjnego wglądu w każdy etap dowodu. Dowody matematyczne mogą być traktowane w sposób czysto formalny, jako operacje symboliczne. Hilbert wyraźnie mówił o tym, iż nie można żądać, aby każda formuła (sama w sobie) była interpre-

[21] Chcę tutaj podkreślić, że mam na myśli aspekty metodologiczne. Nie stawiam tu oczywiście (jawnie fałszywej) tezy, że w sporze o istnienie obiektów matematycznych powszechne jest stanowisko nominalistyczne.

towalna; natura dowodu matematycznego jest bowiem taka, że nie jest konieczne opieranie się na intuicji czy odwoływaniu do znaczeń formuł w środku dowodu (HILBERT 1928, 475). Mówiąc nieco żartobliwie, w miejsce „Widzę!" pojawia się „Wyszło z obliczeń!". W ramach nowej koncepcji matematyki w badaniach matematycznych abstrahuje się od intuicyjnego znaczenia terminów oraz od ewentualnej interpretacji teorii, traktując ją czysto hipotetycznie. W takim ujęciu nie traktujemy już systemu aksjomatów jako zbioru zdań, które odnoszą się do pewnego zamierzonego przedmiotu interpretacji, ale uważamy ten system za zbiór warunków opisujących pewną strukturę relacyjną (której „natura" nie jest i nie może być ujęta inaczej, jak właśnie poprzez te aksjomaty) (BERNAYS 1967, 497). W odniesieniu np. do geometrii czysto logiczne rozumowania oparte na aksjomatach nie stanowią jedynie wsparcia dla opartych na intuicji badaniach figur przestrzennych, ale stanowią właściwy sposób argumentacji i podstawę do formułowania twierdzeń na temat zjawisk geometrycznych.

Nie należy jednak oczywiście sądzić, że tak rozumiane stanowisko formalistyczne sprowadza matematykę do gry symboli pozbawionej interpretacji. Ta gra symboli nie bierze się oczywiście znikąd. Celem teorii dowodu ma być właśnie opisanie (uchwycenie) tego naszego procesu rozumienia, czyli stworzenie katalogu (protokołu) reguł, na których opiera się nasze myślenie. „Myślenie, tak się składa, przebiega równolegle do mówienia i pisania: tworzymy wypowiedzi i umieszczamy je jedną za drugą" (HILBERT 1928, 475). Hilbert podkreśla, że reguły naszego myślenia tworzą system, który jesteśmy w stanie odkryć i precyzyjnie opisać[22]. Jeśli więc nawet dowodzenie uznać za swoistą grę symboli, to jest to gra prowadzona wedle reguł, które ujmują sposób naszego myślenia – ma więc nie tylko znaczenie matematyczne, ale również filozoficzne.

Ewolucja myślenia matematycznego w stronę formalizmu nie polega więc bynajmniej na przyjęciu nihilistycznych tez metafizycznych ani na całkowitym zanegowaniu roli intuicji w matematyce. Intuicyjny wgląd nie stanowi nieodzownego elementu dowodzenia w matematyce; możliwe jest dowodzenie w duchu czysto formalnym. Intuicja jednak nie może zostać całkowicie wyeliminowana z matematyki[23].

---

[22] Nie ma tu więc oczywiście żadnego „matematycznego mistycyzmu". Myślenie matematyczne jest ujmowalne w precyzyjne reguły, można powiedzieć, że jest – w swobodnym sensie tego słowa – algorytmizowalne.

[23] Pewnego typu intuicyjne, preteoretyczne ujęcie podstawowych dla danej dziedziny prawd jest konieczne, aby w ogóle ta dyscyplina mogła zaistnieć. Aksjomatyzacja stanowi znacznie

Poincaré stwierdził swego czasu, iż logika czasem rodzi potwory (POINCARÉ 1952, 125). Można powiedzieć, że to algebraizacja i formalizacja matematyki wprowadziła takie właśnie potwory na salony matematyczne. Werdykt intuicji utracił znaczenie, stała się ona (co najwyżej) pewnego rodzaju pomocniczą zdolnością. Intuicja przestaje być rękojmią prawdziwości twierdzeń nawet wtedy, gdy subiektywnie nie mamy absolutnie żadnych wątpliwości[24]. Obecnie raczej oskarżymy intuicję o to, że jest błędna i zwodnicza, niż samą matematykę o to, że jest uprawiana w niewłaściwy sposób. Jeśli posłużymy się rozróżnieniem dowodów na dowody wymuszające zgodę na daną tezę i dowody oświecające umysł, to swoistym *novum*, które przynosi nam stanowisko formalizmu jest właśnie wprowadzenie kategorii dowodu wymuszającego zgodę. Choć taki dowód nie musi być rozumiany intuicyjnie, to jednak wzbogaca naszą wiedzę matematyczną i pełni istotną rolę w budowaniu gmachu wiedzy matematycznej. Taką zmianę rozumienia pojęcia dowodu uważam za podstawowy wkład nowego, formalistycznego sposobu myślenia o matematyce.

BIBLIOGRAFIA

BERNAYS P. (1967): *Hilbert, David*, [w:] P. EDWARDS (red.), *The Encyclopedia of Philosophy*, vol. 3, New York: Macmillian Publishing Co. and The Free Press, 496-504.

DETLEFSEN M. (2005): *Formalism*, [w:] S. SHAPIRO (red.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford: Oxford University Press, 236-317.

FEFERMAN S. (2000): *Mathematical intuition vs. mathematical monsters*, „Synthese” 125, 317-332.

FREGE G. (1903): *Grundgesetze der Arithmetik 2*, Jena: H. Pohle.

FREGE G. (1906): *Über die Grundlagen der Geometrie*, „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung” 12, 319-324, 368-375.

FREUDENTHAL H. (1962): *The main trends in the foundations of geometry in the 19th century*, [w:] E. NAGEL, P. SUPPES, A. TARSKI (red.) *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Proceedings of the 1960 Congress, Stanford: Stanford University Press, 613-621.

HAHN H. (1980): *Empiricism, Logic and Mathematics*, Dordrecht–London–Boston: D. Reidel.

HEINE E. (1872): *Die Elemente der Funktionenlehre*, „Journal für die reine und angewandte Mathematik” 74, 172-188.

HILBERT D. (1926): *Über das Unendliche*, „Mathematische Annalen” 95, 161-190. Przekład polski w: MURAWSKI 1986, 288-307.

późniejszy etap. Mówiąc o tej eliminacji intuicji mam raczej na myśli to, że intuicja rozumiana w najprostszy, poniekąd naiwny sposób (np. jako wizualizacja) nie jest uważana za wiarygodny środek dowodowy. Dyskusji tego typu problemów poświęcona jest praca FEFERMAN 2000, który wyraźnie stwierdza, że intuicja nie została wyeliminowana z matematycznych rozważań.

[24] Przykładem może być twierdzenie Jordana, głoszące, iż każda krzywa zamknięta dzieli płaszczyznę na dwie części. Pomimo, iż sprawia ono wrażenie oczywistego, to zostało zaakceptowane dopiero po przedstawieniu (wcale niełatwego) dowodu, który nie miał już charakteru poglądowego.

HILBERT D. (1928): *Die Grundlagen der Mathematik*, „Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität” 6; 65-85. Przekład angielski w: J. VAN HEIJENOORT: *From Frege to Gödel: A Sourcebook in Mathematical Logic, 1879-1931*, Cambridge, Mass.: Harvard University Press 1967, 464-479.

KANT I. (1957): *Krytyka czystego rozumu*, t. I, tł. R. Ingarden, Warszawa: PWN.

MCCARTY D. C. (2004): *David Hilbert and Paul du Bois-Reymond: Limits and Ideals*, [w:] G. LINK (red.), *One Hundred Years of Russell's Paradox*, Berlin–New York: Walter de Gruyter, 517-532.

MURAWSKI R. (1984): *G. Cantora filozofia teorii mnogości*, „Studia Filozoficzne” 11-12 (8-9), 75-88.

MURAWSKI R. (1986) (red.): *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Poznań: Wydawnictwo UAM.

MURAWSKI R. (1993): *Rozwój programu Hilberta*, „Wiadomości Matematyczne” 30, 51-72.

POINCARÉ H. (1952): *Science and Method*, New York: Dover Publications.

SHAPIRO S. (1996): *Space, Number and Structure: A Tale of Two Debates*, „Philosophia Mathematica” 3 (4), 148-173.

SHAPIRO S. (2000): *Thinking about Mathematics. The Philosophy of Mathematics*, Oxford: Oxford University Press,.

SHAPIRO S. (2005): *Categories, Structures, and the Frege-Hilbert Controversy: The Status of Meta-mathematics*, „Philosophia Mathematica” 13 (1), 61-77

SIEG W. (1984): *Foundations for analysis and proof theory*, „Synthese” 60, 159-200.

SIMPSON S.G. (1988): *Partial Realisations of Hilbert's Program*, „Journal of Symbolic Logic” 53, 349-363.

SMORYNSKI C. (1977): *The incompleteness theorem*, [w:] J. Barwise (red.), *Handbook of mathematical logic*, Amsterdam: North-Holland, 821-864.

THOMAE J. (1898): *Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer complexen Veränderlichen*, 2. Aufl., Halle: L. Nebert.

ZERMELO E. (1908): *A new proof ot the possibility of a well-ordering*, [w:] J. VAN HEIJENOORT (red.), *From Frege to Gödel. A source-book in mathematical logic, 1879-1931*, Cambridge, Mass.: Harvard University Press 1967, 183-198.

MATHEMATICAL PROOF FROM THE FORMALISTIC VIEWPOINT

PART II

Summary

In the second part I discuss Frege's and Hilbert views on the nature of mathematical proof, in particular their discussion concerning the problem of implicit definitions. I also discuss Hilbert's program and conclude with some remarks concerning the problem of the “decline of intuition” in the formalistic conception of mathematical proof.

Summarised by Krzysztof Wójtowicz

Słowa kluczowe: program Hilberta, platonizm Fregego, intuicja matematyczna.

Key words: Hilbert's program, Frege's Platonism, mathematical intuition.

Information about Author: Prof. Dr. KRZYSZTOF WÓJTOWICZ – Institute of Philosophy, Warsaw School of Social Psychology; address for correspondence: ul. Chodakowska 19/31, PL 03-815 Warszawa; e-mail: kwojtowicz@swps.edu.pl