

## Konkurs Matematyczny, KUL, 30 marca 2012 r.

W pustych kratkach obok liter A) B) C) D) należy wpisać słowo TAK lub NIE. Zadanie zostanie uznane za rozwiązane, jeśli wszystkie cztery odpowiedzi są poprawne. Błędna odpowiedź na każde z pytań A) B) C) D) można poprawić tylko raz, przekreślając błąd i wpisując prawidłową odpowiedź z lewej strony zakreślonej kratki.

### Zadania za 1 punkt

1. Wartość wyrażenia

$$\left(x^2 + \frac{x^3}{x^2 + 1} + \frac{\sin x}{2x}\right) \sin^2 4x - \pi^0 + \cos^2 4x$$

dla  $x = \frac{1}{2}$  wynosi

A)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C) 0

B) 1

D)  $\frac{1}{2}$

2. Równanie  $4x^2 - y^2 = 0$  przedstawia

A) punkt

C) okrąg

B) jedną prostą

D) dwie proste

### Zadania za 2 punkty

3. Liczba

$$\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - 2\sqrt{3}$$

jest

A) wymierna

C) niewymierna

B) całkowita

D) całkowita parzysta

4. Równanie prostej będącej obrazem prostej  $k : y = 2x + 3$  w symetrii względem osi  $0x$  ma postać

A)  $y = 2x - 3$

C)  $y = -2x + 3$

B)  $y = -2x - 3$

D)  $y = -\frac{x}{2} + 3$

### Zadania za 3 punkty

5. Zbiór punktów odległych od punktu  $(2, 1)$  o 3 opisuje równanie

- |                          |                                    |                          |                                |
|--------------------------|------------------------------------|--------------------------|--------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | A) $2x^2 - 8x + 2y^2 - 4y - 8 = 0$ | <input type="checkbox"/> | C) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$ |
| <input type="checkbox"/> | B) $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 4$       | <input type="checkbox"/> | D) $x^2 + y^2 = 9$             |

6. Dla liczb  $1, 1, 2, 2, a, a, a, b, b, 7$  uporządkowanych w ciąg niemalejący średnia i mediana wynoszą 3. Zatem

- |                          |                   |                          |                   |
|--------------------------|-------------------|--------------------------|-------------------|
| <input type="checkbox"/> | A) $a = b = 3, 5$ | <input type="checkbox"/> | C) $a = 3, b = 4$ |
| <input type="checkbox"/> | B) $a = b = 5$    | <input type="checkbox"/> | D) $a = 3, b = 6$ |

### Zadania za 4 punkty

7. Funkcja  $f$  jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{2^{2 \log_4 |x - 2|}}{(x - 2)}$$

Zatem

- |                          |   |                          |  |
|--------------------------|---|--------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> | A) dziedziną funkcji $f$ jest $R \setminus \{2\}$ | <input type="checkbox"/> | C) funkcja $f$ jest rosnąca                      |
| <input type="checkbox"/> | B) funkcja $f$ jest różnowartościowa              | <input type="checkbox"/> | D) zbiorem wartości funkcji $f$ jest $\{-1, 1\}$ |

8. Okręgi  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$  oraz  $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$

- |                          |                                |                          |                           |
|--------------------------|--------------------------------|--------------------------|---------------------------|
| <input type="checkbox"/> | A) przecinają się w 2 punktach | <input type="checkbox"/> | C) są rozłączne           |
| <input type="checkbox"/> | B) są styczne zewnętrznie      | <input type="checkbox"/> | D) są styczne wewnętrznie |

### Zadania za 5 punktów

9. Rzucamy czterema kostkami do gry. Prawdopodobieństwo, że z oczek otrzymanych na kostkach można zbudować ciąg rosnący jest

- |                          |                              |                          |   |
|--------------------------|------------------------------|--------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> | A) mniejsze od $\frac{1}{2}$ | <input type="checkbox"/> | C) równe $\frac{5}{18}$   |
| <input type="checkbox"/> | B) większe od $\frac{1}{2}$  | <input type="checkbox"/> | D) jest takie samo jak prawdopodobieństwo zbudowania ciągu malejącego |

10. Cena franka szwajcarskiego przez 3 kolejne dni wzrastała o 10% w stosunku do dnia poprzedniego, a przez 3 kolejne dni malała o 10%. Zatem po 6 dniach cena franka szwajcarskiego

A) spadła

C) wzrosła

B) nie zmieniła się

D) zależy od ceny wyjściowej

11. Zaznacz zdania prawdziwe słowem TAK, a nieprawdziwe słowem NIE:

A) istnieją ciągi geometryczne o wyrazach dodatnich i ujemnych

B) istnieją ciągi, które są jednocześnie arytmetyczne i geometryczne

C) istnieją ciągi geometryczne, których 5 pierwszych wyrazów jest dodatnich, a pozostałe ujemne

D) istnieją ciągi arytmetyczne, których 5 pierwszych wyrazów jest dodatnich, a pozostałe ujemne.

12. Zbiorem wartości funkcji

$$f(\alpha) = \sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha, \quad \alpha \in R,$$

jest

A)  $\langle -1, 1 \rangle$

C)  $\langle -2, 2 \rangle$

B)  $\langle -3, 3 \rangle$

D)  $\langle -\sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle$

13. W klasie jest  $N$  dziewcząt i 6 chłopców. Delegację składającą się z 1 chłopaka i 2 dziewcząt można stworzyć na 270 sposobów, zatem

A) w klasie jest parzysta liczba uczniów

C) w klasie jest więcej dziewcząt niż chłopców

B) w klasie jest dokładnie 16 dziewcząt

D) taka sytuacja jest niemożliwa

14. Do pracy zgłosiło się 20 tłumaczy. Niektórzy z nich znali 1 język obcy lub więcej: 11 znało rosyjski, 10 znało hiszpański, 12 angielski; niektórzy tłumacze znali przynajmniej 2 języki, przy czym 7 znało rosyjski i hiszpański, 5 znało hiszpański i angielski, a 6 znało rosyjski i angielski. Wszystkie 3 wspomniane języki znało 3 tłumaczy. Ilu spośród 20 tłumaczy nie znało żadnego z wymienionych języków?

A) 0

C) 2

B) 1

D) 3

15. Jedynymi osiami symetrii czworokąta wypukłego na płaszczyźnie są 2 różne proste  $k$  i  $m$ , leżące na tej płaszczyźnie. Wynika stąd, że

- |                          |                                    |                          |                                    |
|--------------------------|------------------------------------|--------------------------|------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | A) proste $k$ i $m$ przecinają się | <input type="checkbox"/> | C) proste $k$ i $m$ są prostopadłe |
| <input type="checkbox"/> | B) proste $k$ i $m$ są równoległe  | <input type="checkbox"/> | D) czworokąt ma środek symetrii    |

16. Równanie

$$x^4 - 10x^2 + 9 = a,$$

gdzie  $a$  jest liczbą rzeczywistą, może mieć

- |                          |                            |                          |                        |
|--------------------------|----------------------------|--------------------------|------------------------|
| <input type="checkbox"/> | A) dokładnie 1 pierwiastek | <input type="checkbox"/> | C) 2 różne pierwiastki |
| <input type="checkbox"/> | B) 3 różne pierwiastki     | <input type="checkbox"/> | D) 4 różne pierwiastki |

17. Funkcja  $f(x) = \cos x + 1$ , gdzie  $x \in R$

- |                          |                                 |                          |   |
|--------------------------|---------------------------------|--------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> | A) przyjmuje wartość 0          | <input type="checkbox"/> | C) ma nieskończenie wiele miejsc zerowych |
| <input type="checkbox"/> | B) przyjmuje wartość $\sqrt{2}$ | <input type="checkbox"/> | D) nie przyjmuje wartości $\sqrt{2}$      |

18. Spośród poniższych zdań:

- 1) Jeżeli równoległobok można wpisać w okrąg, to jest on prostokątem.
- 2) Jeżeli w równoległobok można wpisać okrąg, to jest on rombem.
- 3) Każdy trapez równoramienny, którego przekątne przecinają się pod kątem prostym jest kwadratem.

- |                          |                               |                          |                             |
|--------------------------|-------------------------------|--------------------------|-----------------------------|
| <input type="checkbox"/> | A) dokładnie 1 jest prawdziwe | <input type="checkbox"/> | C) dokładnie 2 są prawdziwe |
| <input type="checkbox"/> | B) dokładnie 3 są prawdziwe   | <input type="checkbox"/> | D) żadne nie jest prawdziwe |

19. Pole powierzchni całkowitej czworościanu opisanego na kuli o promieniu 3 cm jest równe  $600 \text{ cm}^2$ . Wynika stąd, że

- |                          |  |
|--------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> | A) objętość czworościanu wynosi $300 \text{ cm}^3$   |
| <input type="checkbox"/> | B) każda z 4 wysokości ma długość większą od 6 cm    |
| <input type="checkbox"/> | C) objętość czworościanu wynosi $600 \text{ cm}^3$   |
| <input type="checkbox"/> | D) suma długości krawędzi czworościanu wynosi 120 cm |

20. Przekrój sześciianu płaszczyzną może być

- |                          |                 |                          |                          |
|--------------------------|-----------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | A) czworokątem  | <input type="checkbox"/> | C) pięciokątem           |
| <input type="checkbox"/> | B) sześciokątem | <input type="checkbox"/> | D) sześciokątem foremnym |

21. Wiadomo, że  $P[A] = \frac{3}{4}$ ,  $P[B] = \frac{7}{9}$ . Wtedy

A)  $P[A \cap B] = 0,5$

C)  $P[A \cap B] < 0,5$

B)  $P[A \cap B] > 0,5$

D)  $P[A \cup B] \geq 2P[A \cap B]$

22. Funkcja  $f$  przyporządkowuje każdej liczbie  $x \in R$  odległość punktu  $x$  od najbliższego punktu o współrzędnej całkowitej. Liczba rozwiązań równania

$$f(x) = \frac{1}{2012}x$$

wynosi

A) 1005

C) 1006

B) 2010

D) 2012

23. Zaznacz zdania prawdziwe słowem TAK, a nieprawdziwe słowem NIE:

A) istnieje dokładnie jedna funkcja  $f : R \setminus \{0\} \rightarrow R$ , spełniająca dla każdej liczby  $x \in R \setminus \{0\}$  warunek  $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$

B) jeżeli funkcja  $f : R \setminus \{0\} \rightarrow R$  spełnia podany warunek, to  $f(1) = \frac{1}{4}$

C) jeżeli funkcja  $f : R \setminus \{0\} \rightarrow R$  spełnia taki warunek, to  $f$  jest parzysta

D) nie istnieje funkcja  $f : R \setminus \{0\} \rightarrow R$  spełniająca podany warunek

24. Ojciec i jego dwaj synowie koszą trawę przed domem. W ciągu godziny każdy syn wykonuje  $\frac{2}{3}$  pracy wykonywanej przez ojca. Sam ojciec kosiłby trawę przez 3,5 godziny, wobec tego cała trójka wykona pracę w ciągu

A) 2 godzin

C) 3 godzin

B) 3,5 godziny

D) 1,5 godziny