ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom LVI, numer 1 – 2008

EDWARD NIEZNAŃSKI

ALGEBRA POJĘĆ DEONTYCZNYCH

WSTĘP

Związki logiczne zachodzące między pojęciami deontycznymi J. Kalinowski ilustrował za pomocą piramidy logicznej, a R. Blanché – za pomocą tzw. sześciokąta Blanchégo[1]. Jednakże adekwatną ilustracją w tym przypadku okazuje się być dopiero uproszczony graf skierowany 8-elementowej algebry Boole'a[2], który spełni swoją istotną funkcję w niniejszym artykule.

Leibniz sugerował, że modalności deontyczne mogą być zdefiniowane w terminach modalności aletycznych i według niego dozwolone (*licitum*) jest to, co dobry człowiek może uczynić, a obowiązujące (*debitum*) jest to, co dobry człowiek czynić musi[3]. Związek pojęć deontycznych z moralną oceną czynów zapewne najcelniej ujął J. Kalinowski w swym systemie K1, wyłożonym w pracy habilitacyjnej *Logika zdań praktycznych* (Paryż 1972)[4]. Z pomysłów Kalinowskiego skorzystamy w niniejszej pracy.

Prof. dr hab. EDWARD NIEZNAŃSKI – Katedra Logiki, Instytut Filozofii, Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego; adres do korespondencji: ul. Dewajtis 5, 01-815 Warszawa, e-mail: eden@stegny.2a.pl

[1] Zob. J. Kalinowski, *Logika norm*, Lublin 1972.

[2] Zob. np. R. Dubish, *Lattices to Logic*, New York 1964, s. 27; M. Tokarz, *Wprowadzenie do logiki,* Katowice 1984, s. 108; A. Wojciechowska, *Elementy logiki i teorii mnogości*, Warszawa 1979, s. 58.

[3] Zob. R. Hilpinen, *Deontic Logic*, [w:] L. Goble (ed.), *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*, Oxford 2001, s. 159.

[4] Jej istotne fragmenty są przedstawione w *Logice norm* (s. 123-128).

1. STOSUNEK POJĘĆ DEONTYCZNYCH DO ETYCZNYCH

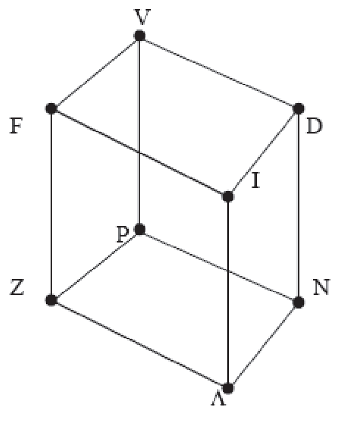
Wprowadzamy trzy stałe indywiduowe: *b, i, m*, znaczące odpowiednio dowolny – ale określony – czyn dobry (*bonus*), neutralny (*indifferens*), zły (*malus*). Przeciwieństwo czynu *x* oznaczamy symbolem x' (nie *x*) i rozumiemy zgodnie z matrycą Matr. I:

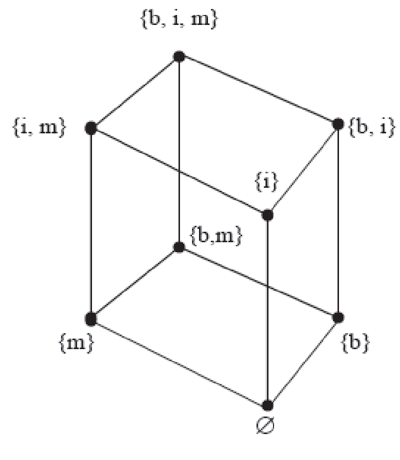
x	x'
b	*m*
i	*i*
m	*b*

Matr. I

Należy zatem rozumieć, że przeciwieństwem czynu dobrego (*b*) jest czyn zły (*m*) i odwrotnie, przeciwieństwem zaś czynu neutralnego (*i*) jest czyn neutralny (*i*).

Przyjmujemy następnie stałe mnogościowe *V* (pełny zbiór czynów objętych normą lub prawem), *Λ* (pusty zbiór czynów), *N* (zbiór czynów nakazanych), *Z* (zbiór czynów zakazanych), *P* (zbiór czynów przymusowych, obowiązkowych), *F* (zbiór czynów fakultatywnych), *D* (zbiór czynów dozwolonych), *I* (zbiór czynów indyferentnych). Rodzinę tych zbiorów oznaczamy przez $\Gamma = \{V, \Lambda, N, Z, P, F, D, I\}$. Przedstawmy grafy dwu algebr Boole'a, które nazwiemy algebrą deontyczną (AD) i algebrą aksjologiczną (AA):





Są to algebry $AD = < \Gamma, \subseteq >$ i $AA = < 2^{\{b,\ i,\ m\}}, \subseteq >$. Oznaczmy przez *f* funkcję różnowartościową odwzorowującą zbiór Γ na zbiór $2^{\{b,i,m\}}$ tak, że:

f(V) = {b, i, m}, f(Λ) = ∅, f(N) = {b}, f(Z) = {m}, f(P) = {b, m}, f(F) = {i, m}, f(D) = {b, i}, f(I) = {i}. Funkcja f wyznacza izomorfizm obu algebr: AD iz$_f$ AA. Ustalamy stąd związki między elementami *b, i, m* a zbiorami V, Λ, N, Z, P, F, D, I ze względu na wartości prawdy (1) i fałszu (0). Ujmuje je matryca Matr. II:

∈	V	Λ	N	Z	P	F	D	I
b	1	0	1	0	1	0	1	0
i	1	0	0	0	0	1	1	1
m	1	0	0	1	1	1	0	0

Matr. II

Prawdą więc jest, że każdy czyn dobry, neutralny i zły należy do zbioru pełnego, a do zbioru pustego nie należy żaden z nich. Prawdą jest, że tylko czyn dobry należy do zbiorów nakazanych, tylko zły – do czynów zakazanych, dobry i zły do obowiązkowych, neutralny i zły – do czynów fakultatywnych, dobry i neutralny – do dozwolonych, a tylko neutralny – do zbioru czynów indyferentnych.

Pod nazwą „algebra pojęć deontycznych" zostaną przedstawione dwie algebry: algebra zbiorów i algebra Boole'a, a dokładniej – teorie tych algebr.

2. ALGEBRA MNOGOŚCI CZYNÓW OBJĘTYCH NORMĄ LUB PRAWEM

2.1. *Składnia*

2.1.1. Termami indywidualnymi są:
1) zmienne indywiduowe: *x, y, z,...*;
2) stałe idywiduowe: *b, i, m*;
3) Jeżeli τ jest termem indywiduowym, to jest nim również τ′.

2.1.2. Termami mnogościowymi są:
1) zmienne mnogościowe: *A, B, C,...*;
2) stałe mnogościowe: V, Λ, N, Z, P, F, D, I;
3) Jeżeli X i Y są termami mnogościowymi, to są nimi również: X* (dopełnienie zbioru), X∩Y (iloczyn zbiorów) i X∪Y (suma zbiorów).

2.1.3. Formułami są:
1) formuły atomowe: $\tau_1=\tau_2$, τ∈X, X=Y, X⊆Y, gdzie τ, τ_1, τ_2 to termy indywiduowe, a X, Y – termy mnogościowe;

2) Jeżeli Φ, Ψ są formułami, to są nimi również: $\sim\Phi$, $\Phi\rightarrow\Psi$, $\Phi\wedge\Psi$, $\Phi\vee\Psi$, $\Phi\leftrightarrow\Psi$;
3) Jeżeli v jest zmienną indywiduową, a Φ jest formułą, to formułami są również: $\forall v\Phi$, $\exists v\Phi$.

2.2. *Rachunek*

W rachunku algebry zbiorów stosujemy znane reguły wnioskowania założeniowego systemów Słupeckiego-Borkowskiego.

W zwykłej algebrze zbiorów wystarczy przyjąć jeden aksjomat, który również tu wprowadzamy:

A1. $x\in V$.

Jednakże w związku z dodaniem do zwykłego języka algebry zbiorów znaku zaprzeczenia indywiduum (x') dodajemy również dodatkowy aksjomat:

A2. $x'' = x$.

Przyjmujemy definicje pojęć wspólnych wszystkim algebrom zbiorów:

Df.*: $x\in X^* \leftrightarrow x\notin X$,

Df.$\cap$: $x\in X\cap Y \leftrightarrow (x\in X \wedge x\in Y)$,

DF.$\cup$: $x\in X\cup Y \leftrightarrow (x\in X \vee x\in Y)$,

Df.$\subseteq$: $X\subseteq Y \leftrightarrow \forall x\, (x\in X \rightarrow x\in Y)$,

Df.=: $X=Y \leftrightarrow \forall x\, (x\in X \leftrightarrow x\in Y)$.

Dodajemy następnie definicje specyficznych stałych deontycznych:

Df.V: $x\in V \leftrightarrow (x\in D \vee x'\in D)$,

Df.Λ: $\Lambda=V^*$,

Df.Z: $Z=D^*$,

Df.N: $x\in N \leftrightarrow x'\notin D$,

Df.F: $x\in F \leftrightarrow x'\in D$,

Df.I: $x\in I \leftrightarrow (x\in D \wedge x'\in D)$,

Df.P: $x\in P \leftrightarrow (x\notin D \vee x'\notin D)$.

Sprawdzamy (na podstawie matryc) wartość logiczną aksjomatów i definicji stałych deontycznych:

Ad A1: $b\in V \approx$[5] $b\in D \vee b'\in D \approx b\in D \vee m\in D \approx 1\vee 0 \approx 1$;
$i\in V \approx i\in D \vee i'\in D \approx i\in D \vee i\in D \approx 1\vee 1 \approx 1$;
$m\in D \approx m\in D \vee m'\in D \approx m\in D \vee b\in D \approx 0\vee 1 \approx 1$.

[5] $\Phi\approx\Psi$ znaczy równoważność inferencyjną Φ i Ψ.

Ad A2: $b'' = m' = b$, $i'' = i' = i$, $m'' = b' = m$.

Ad Df.Λ: $b \in \Lambda \leftrightarrow b \in V^* \approx b \in \Lambda \leftrightarrow b \notin V \approx 0 \leftrightarrow 0 \approx 1$;
$i \in \Lambda \leftrightarrow i \in V^* \approx i \in \Lambda \leftrightarrow i \notin V \approx 0 \leftrightarrow 0 \approx 1$;
$m \in \Lambda \leftrightarrow m \in V^* \approx m \in \Lambda \leftrightarrow m \notin V \approx 0 \leftrightarrow 0 \approx 1$.

Ad Df.Z: $b \in Z \leftrightarrow b \in D^* \approx b \in Z \leftrightarrow b \notin D \approx 0 \leftrightarrow 0 \approx 1$;
$i \in Z \leftrightarrow i \in D^* \approx i \in Z \leftrightarrow i \notin D \approx 0 \leftrightarrow 0 \approx 1$;
$m \in Z \leftrightarrow m \in D^* \approx m \in Z \leftrightarrow m \notin D \approx 1 \leftrightarrow 1 \approx 1$.

Ad Df.N: $b \in N \leftrightarrow b' \notin D \approx b \in N \leftrightarrow m \notin D \approx 1 \leftrightarrow 1 \approx 1$;
$i \in N \leftrightarrow i' \notin D \approx i \in N \leftrightarrow i \notin D \approx 0 \leftrightarrow 0 \approx 1$;
$m \in N \leftrightarrow m' \notin D \approx m \in N \leftrightarrow b \notin D \approx 0 \leftrightarrow 0 \approx 1$.

Ad Df.F: $b \in F \leftrightarrow b' \in D \approx b \in F \leftrightarrow m \in D \approx 0R0 \approx 1$;
$i \in F \leftrightarrow i' \in D \approx i \in F \leftrightarrow i \in F \approx 1 \leftrightarrow 1 \approx 1$;
$m \in F \leftrightarrow m' \in D \approx m \in F \leftrightarrow b \in D \approx 1 \leftrightarrow 1 \approx 1$.

Ad Df.I: $b \in I \leftrightarrow (b \in D \wedge b' \in D) \approx b \in I \leftrightarrow (b \in D \wedge m \in D) \approx 0 \leftrightarrow (1 \wedge 0) \approx 0 \leftrightarrow 0 \approx 1$;
$i \in I \leftrightarrow (i \in D \wedge i' \in D) \approx i \in I \leftrightarrow (i \in D \wedge i \in D) \approx 1 \leftrightarrow (1 \wedge 1) \approx 1 \leftrightarrow 1 \approx 1$;
$m \in I \leftrightarrow (m \in D \wedge m' \in D) \approx m \in I \leftrightarrow (m \in D \wedge b \in D) \approx 0 \leftrightarrow (0 \wedge 1) \approx 0 \leftrightarrow 0 \approx 1$.

Ad Df.P: $b \in P \leftrightarrow (b \notin D \vee b' \notin D) \approx b \in P \leftrightarrow (b \notin D \vee m \notin D) \approx 1 \leftrightarrow (0 \vee 1) \approx 1 \leftrightarrow 1 \approx 1$;
$i \in P \leftrightarrow (i \notin D \vee i' \notin D) \approx i \in P \leftrightarrow (i \notin D \vee i \notin D) \approx 0 \leftrightarrow (0 \vee 0) \approx 0 \leftrightarrow 0 \approx 1$;
$m \in P \leftrightarrow (m \notin D \vee m' \notin D) \approx m \in P \leftrightarrow (m \notin D \vee b \notin D) \approx 1 \leftrightarrow (1 \vee 0) \approx 1 \leftrightarrow 1 \approx 1$.

Wszystkie sprawdzane formuły okazały się być prawdziwe przy każdym wartościowaniu zmiennych. Na przedłożonych podstawach przeprowadzamy dowody szeregu twierdzeń tej teorii.

T1. $x \notin \Lambda$, bo Df.Λ $\vdash$[6] $x \in \Lambda \leftrightarrow x \notin V \vdash x \in V \leftrightarrow x \notin \Lambda$, A1 $\vdash x \notin \Lambda$.
T2. $F = N^*$, bo $x \in F \approx x' \in D \approx x \notin N \approx x \in N^*$.
T3. $P = I^*$, bo $x \in I^* \approx x \notin I \approx (x \notin D \vee x' \notin D \approx x \in P$.
T4. $\Lambda \subseteq A$, bo $x \notin \Lambda \rightarrow (x \in \Lambda \rightarrow x \in A)$, T1 $\vdash \forall x\, (x \in \Lambda \rightarrow x \in A) \vdash \Lambda \subseteq A$.
T5. $\Lambda \subseteq \Lambda \wedge \Lambda \subseteq N \wedge \Lambda \subseteq Z \wedge \Lambda \subseteq P \wedge \Lambda \subseteq F \wedge \Lambda \subseteq D \wedge \Lambda \subseteq I \wedge \Lambda \subseteq V$, bo T4.
T6. $A \subseteq A$, bo $p \rightarrow p$.
T7. $\Lambda \subseteq \Lambda \wedge N \subseteq N \wedge Z \subseteq Z \wedge P \subseteq P \wedge F \subseteq F \wedge D \subseteq D \wedge I \subseteq I \wedge V \subseteq V$, bo T6.
T8. $A \subseteq V$, bo $x \in V \rightarrow (x \in A \rightarrow x \in V)$, A1 $\vdash \forall x\, (x \in A \rightarrow x \in V) \vdash A \subseteq V$.
T9. $\Lambda \subseteq V \wedge N \subseteq V \wedge Z \subseteq V \wedge P \subseteq V \wedge F \subseteq V \wedge D \subseteq V \wedge I \subseteq V \wedge V \subseteq V$, bo T8.

[6] Symbol $\vdash$ jest znakiem inferencyjnego „więc”.

T10. $A \subseteq B \leftrightarrow A \cap B = A$, bo $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge q \leftrightarrow p)$.
T11. $A \subseteq B \leftrightarrow A \cup B = B$, bo $(p \rightarrow q) \leftrightarrow [(p \vee q) \leftrightarrow q]$.
T12. $A \cap \Lambda = \Lambda$, bo T10, T4.
T13. $\Lambda \cap \Lambda = \Lambda \wedge N \cap \Lambda = \Lambda \wedge Z \cap \Lambda = \Lambda \wedge P \cap \Lambda = \Lambda \wedge F \cap \Lambda = \Lambda \wedge D \cap \Lambda = \Lambda \wedge I \cap \Lambda = \Lambda \wedge V \cap \Lambda = \Lambda$, bo T12.
T14. $A \cup \Lambda = A$, bo T11, T4.
T15. $\Lambda \cup \Lambda = \Lambda \wedge N \cup \Lambda = N \wedge Z \cup \Lambda = Z \wedge P \cup \Lambda = P \wedge F \cup \Lambda = F \wedge D \cup \Lambda = D \wedge I \cup \Lambda = I \wedge V \cup \Lambda = V$, bo T14.
T16. $A \cap A = A$, bo T10, T6.
T17. $\Lambda \cap \Lambda = \Lambda \wedge N \cap N = N \wedge Z \cap Z = Z \wedge P \cap P = P \wedge F \cap F = F \wedge D \cap D = D \wedge I \cap I = I \wedge V \cap V = V$, bo T16.
T18. $A \cup A = A$, bo T11, T6.
T19. $\Lambda \cup \Lambda = \Lambda \wedge N \cup N = N \wedge Z \cup Z = Z \wedge P \cup P = P \wedge F \cup F = F \wedge D \cup D = D \wedge I \cup I = I \wedge V \cup V = V$, bo T18.
T20. $I \subseteq D$, bo $x \in I \vdash x \in D \wedge x' \in D \vdash x \in D$.
T21. $I = I \cap D \wedge D = I \cup D$, bo T10, T11, T20.
T22. $I \subseteq F$, bo $x \in I \vdash x \in D \wedge x' \in D \vdash x' \in D \vdash x \in F$.
T23. $I = I \cap F \wedge F = I \cup F$, bo T10, T11, T22.
T24. $I = F \cap D$, bo T22, T20 $\vdash I \subseteq F \cap D$; $x \in F \cap D \vdash x \in F \wedge x \in D \vdash x' \in D \wedge x \in D \vdash x \in I$.
T25. $x' \notin D \rightarrow x \in D$, bo A1 $\vdash x \in V \vdash x \in D \vee x' \in D \vdash x' \notin D \rightarrow x \in D$.
T26. $Z \subseteq F$, bo $x \in Z \vdash x \in D^* \vdash x \notin D$, T25 $\vdash x' \in D \vdash x \in F$.
T27. $Z = Z \cap F \wedge Z \cup F = F$, bo T10, T11, T26.
T28. $Z \subseteq P$, bo $x \in Z \vdash x \notin D \vdash x \notin D \vee x' \notin D \vdash x \in P$.
T29. $Z = Z \cap P \wedge P = Z \cup P$, bo T10, T11, T28.
T30. $Z = F \cap P$, bo T26, T28 $\vdash Z \subseteq F \cap P$; $x \in F \cap P \vdash x \in F \wedge x \in P \vdash x' \in D \wedge (x' \notin D \vee x \notin D) \vdash (x' \in D \wedge x' \notin D) \vee (x' \in D \wedge x \notin D) \vdash x \in \Lambda \vee (x' \in D \wedge x \notin D) \vdash x' \in D \wedge x \in D^* \vdash x \in F \wedge x \in Z \vdash x \in Z$.
T31. $N \subseteq D$, bo $x \in N \vdash x' \notin D \vdash x \in D$.
T32. $N \cap D = N \wedge D = N \cup D$, bo T10, T11, T31.
T33. $N \subseteq P$, bo $x \in N \vdash x' \notin D \vdash x \notin D \vee x' \notin D \vdash x \in P$.
T34. $N \cap P = N \wedge P = N \cup P$, bo T10, T11, T33.
T35. $N = D \cap P$, bo T31, T33 $\vdash N \subseteq D \cap P$; $x \in D \cap P \vdash x \in D \wedge x \in P \vdash x \in D \wedge (x \notin D \vee x' \notin D) \vdash (x \in D \wedge x \notin D) \vee (x \in D \wedge x' \notin D) \vdash x \in \Lambda \vee (x \in D \wedge x' \notin D) \vdash x \in D \wedge x' \notin D \vdash x \in D \wedge x \in N$, T32 $\vdash x \in N$.
T36. $A \cup V = V$, bo T8, T11.
T37. $\Lambda \cup V = V \wedge N \cup V = V \wedge Z \cup V = V \wedge P \cup V = V \wedge F \cup V = V \wedge D \cup V = V \wedge I \cup V = V \wedge V \cup V = V$, bo T36.

T38. $F = Z \cup I$, bo T22, T26 $\vdash Z \cup F \subseteq F$; $x \in F \vdash x' \in D \vdash x \notin D \vee x' \in D \vdash x \in V \wedge (x \notin D \vee x' \in D) \vdash (x \notin D \vee x \in D) \wedge (x \notin D \vee x' \in D) \vdash x \notin D \vee (x \in D \wedge x' \in D) \vdash x \in Z \vee x \in I \vdash x \in Z \cup I$.

T39. $D = N \cup I$, bo T31, T20 $\vdash N \cup I \subseteq D$; $x \in D \rightarrow (x \in D \wedge x' \in D) \vdash x' \notin D \vee (x \in D \wedge x' \in D) \vdash x \in N \vee x \in I \vdash x \in N \cup I$.

T40. $P = Z \cup N$, bo T28, T33 $\vdash Z \cup N \subseteq P$; $x \in P \vdash x \notin D \vee x' \notin D \vdash x \in Z \vee x \in N \vdash x \in Z \cup N$.

T41. $V = F \cup D$, bo T9 $\vdash F \cup D \subseteq V$; $x \in V \vdash x \in D \vee x' \in D \vdash x \in D \vee x \in F \vdash x \in F \cup D$.

T42. $A \cup A^* = V$, bo $x \in A \cup A^* \approx x \in A \cup A^* \wedge x \in V \vdash x \in A \cup A^* \leftrightarrow x \in V \vdash \forall x\ (x \in A \cup A^* \leftrightarrow x \in V) \vdash$ T42.

T43. $F \cup N = V \wedge I \cup P = V \wedge D \cup Z = V$, bo T42, T2, T3, Df.Z.

T44. $A \cap A^* = \Lambda$, bo T1 $\vdash \forall x\ x \notin \Lambda \vdash \forall x\ x \notin \Lambda \wedge \forall x\ x \notin A \cap A^* \vdash \forall x\ (x \notin \Lambda \leftrightarrow x \notin A \cap A^*) \vdash \forall x\ (x \in A \cap A^* \leftrightarrow x \in \Lambda) \vdash$ T44.

T45. $F \cap N = \Lambda \wedge I \cap P = \Lambda \wedge D \cap Z = \Lambda$, bo T44, T2, T3, Df.Z.

3. ALGEBRA BOOLE'A POJĘĆ DEONTYCZNYCH

Algebra Boole'a jest rozszerzeniem rachunku tożsamości z aksjomatem $A=A$ i regułą ekstensjonalności dla równości: $A=B$, $\Phi(A) \vdash \Phi(A//B)$. Język tej algebry jest uboższy od języka algebry zbiorów po wyeliminowaniu ze słownika zmiennych indywiduowych, znaku przeczenia indywiduum, symbolu elementu zbioru i kwantyfikatorów.

3.1. *Składnia*

3.1.1. Termami mnogościowymi są:

1) zmienne mnogościowe: A, B, C, ...;
2) stałe deontyczne: V, Λ, N, Z, P, F, D, I;
3) Jeżeli X, Y są termami mnogościowymi, to są nimi również: X^*, $X \cup Y$, $X \cap Y$.

3.1.1. Formułami są:

1) formuły atomowe: $X=Y$, $X \subseteq Y$, dla X, Y będących termami mnogościowymi;
2) Jeżeli Φ, Ψ są formułami, to są nimi również: $\sim\Phi$, $\Phi \wedge \Psi$, $\Phi \vee \Psi$, $\Phi \rightarrow \Psi$, $\Phi \leftrightarrow \Psi$.

W dowodach twierdzeń prezentowanego rachunku, cyfry umieszczone w górze za znakami =, R, $\vdash$ oznaczać będą numery aksjomatów użytych w dedukcji, zaś cyfry w dole po wspomnianych znakach będą numerami użytych twierdzeń, wcześniej udowodnionych.

3.2. *Aksjomatyka algebr Boole'a*

Ax1. $A \cup B = B \cup A$,
Ax2. $A \cap B = B \cap A$,
Ax3. $A \cup \Lambda = A$,
Ax4. $A \cup V = A$,
Ax5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
Ax6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
Df.*: $B = A^* \leftrightarrow A \cap B = \Lambda \wedge A \cup B = V$.

Specyficznym aksjomatem algebry Boole'a pojęć deontycznych jest:
Ax7. $N = N \cap D$.

3.3. Dowodzimy tezy systemu:

Tw1. $A \cap A^* = \Lambda$, bo Df.*: B/A^*
Tw2. $A \cup A^* = V$, bo Df.*: B/A^*.
Tw3. $A \cup A = A$, bo $A =^3 A \cup \Lambda =_1 A \cup (A \cap A^*) =^5 (A \cup A) \cap (A \cup A^*) =_2 (A \cup A) \cap V =^4 A \cup A$.
Tw4. $A \cap A = A$, bo $A =^4 A \cap V =_2 A \cap (A \cup A^*) =^6 (A \cap A \cup (A \cap A^*) =_1 (A \cap A) \cup \Lambda =^3 A \cap A$.
Tw5. $A \cup V = V$, bo $A \cup V =^4 (A \cup V) \cap V =_2 (A \cup V) \cap (A \cup A^*) =^5 A \cup (V \cap A^*) =^4 A \cup A^* =_2 V$.
Tw6. $A \cap \Lambda = \Lambda$, bo $A \cap \Lambda =^3 (A \cap \Lambda) \cup \Lambda =_1 (A \cap \Lambda) \cup (A \cap A^*) =^6 A \cap (\Lambda \cup A^*) =^4 A \cap A^* =_1 \Lambda$.
Tw7. $A = A^{**}$, bo Df.*: B/A, A/A^* $\vdash A = A^{**} \leftrightarrow A^* \cap A = \Lambda \wedge A^* \cup A = V \vdash_{1,2} A = A^{**}$.
Tw8. $A \cap (A \cup B) = A$, bo $A =^3 A \cup \Lambda =_6 A \cup (B \cap \Lambda) =^5 (A \cup B) \cap (A \cup \Lambda) =^3 (A \cup B) \cap A =^2 A \cap (A \cup B)$.
Tw9. $A \cup (A \cap B) = A$, bo $A =^4 A \cup V =_5 A \cap (B \cup V) =^6 (A \cap B) \cup (A \cap V) =^4 (A \cap B) \cup A =^1 A \cup (A \cap B)$.
Tw10. $A \cap [A \cup (B \cup C)] = A$, bo Tw8: $B/B \cup C$.
Tw11. $A \cap [(A \cup B) \cup C] = A$, bo $A \cap [(A \cup B) \cup C] =^6 [A \cap (A \cup B)] \cup (A \cap C) =_8 A \cup (A \cap C) =_9 A$.
Tw12. $A \cap [A \cup (B \cup C)] = A \cap [(A \cup B) \cup C]$, bo Tw.10, Tw.11.

Tw13. $A^*\cap[A\cup(B\cup C)] = A^*\cap(B\cup C)$, bo $A^*\cap[A\cup(B\cup C)] =^6 (A^*\cap A)\cup[A^*\cap(B\cup C)] =_1 \Lambda\cup[A^*\cap(B\cup C)] =^3 A^*\cap(B\cup C)$.

Tw14. $A^*\cap[(A\cup B)\cup C] = A^*\cap(B\cup C)$, bo $A^*\cap[(A\cup B)\cup C] =^6 [A^*\cap(A\cup B)]\cup(A^*\cap C) =^6 [(A^*\cap A)\cup(A^*\cap B)]\cup(A^*\cap C) =_1 [\Lambda\cup(A^*\cap B)]\cup(A^*\cap C) =^3 (A^*\cap B)\cup(A^*\cap C) =^6 A^*\cap(B\cup C)$.

Tw15. $A^*\cap[A\cup(B\cup C)] = A^*\cap[(A\cup B)\cup C]$, bo Tw.13, Tw.14.

Tw16. $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$, bo Tw.12, Tw.15 $\vdash \{A\cap[A\cup(B\cup C)]\}\cup\{A^*\cap[A\cup(B\cup C)]\} = \{A\cap[(A\cup B)\cup C]\}\cup\{A^*\cap[(A\cup B)\cup C] \vdash^6 [A\cup(B\cup C)]\cap(A\cup A^*) = [(A\cup B)\cup C]\cap(A\cup A^*) \vdash_2 [A\cup(B\cup C)]\cap V = [(A\cup B)\cup C]\cap V \vdash^4$ Tw.16.

Tw17. $(A\cup B)^* = A^*\cap B^*$, bo Df.*: $B/A^*\cap B^*, A/A\cup B \vdash A^*\cap B^* = (A\cup B)^* \leftrightarrow (A^*\cap B^*)\cap(A\cup B) = \Lambda \wedge (A^*\cap B^*)\cup(A\cup B) = V$, $(A^*\cap B^*)\cap(A\cup B) =^6 [(A^*\cap B^*)\cap A]\cup[(A^*\cap B^*)\cap B] =_{16} [(A\cap A^*)\cap B^*]\cup[A^*\cap(B\cap B^*)] =_1 (\Lambda\cap B^*)\cup(A^*\cap\Lambda) =_6 \Lambda\cup\Lambda =^3 \Lambda$, $(A^*\cap B^*)\cup(A\cup B) =^5 [(A\cup B)\cup A^*]\cap[(A\cup B)\cup B^*] =_{16} [B\cup(A\cup A^*)]\cap[A\cup(B\cup B^*)] =_2 (B\cup V)\cap(A\cup V) =_5 V\cap V =^4 V \vdash$ Tw.17.

Tw18. $(A\cap B)^* = A^*\cup B^*$, bo Df.*: $B/A^*\cup B^*, A/A\cap B \vdash A^*\cup B^* = (A\cap B)^* \leftrightarrow (A^*\cup B^*)\cap(A\cap B) = \Lambda \wedge (A^*\cup B^*)\cup(A\cap B) = V$, $(A^*\cup B^*)\cap(A\cap B) =^6 (A^*\cap A\cap B)\cup(A\cap B\cap B^*) =_1 (\Lambda\cap B)\cup(A\cap\Lambda) =_6 \Lambda\cup\Lambda =^3 \Lambda$, $(A^*\cup B^*)\cup(A\cap B) =^5 (A^*\cup B^*\cup A)\cap(A^*\cup B^*\cup B) =_2 (B^*\cup V)\cap(A^*\cup V) =_5 V\cap V =_4 V$.

Tw19. $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$, bo Tw.16 $\vdash [A\cup(B\cup C)]^* = [(A\cup B)\cup C]^* \vdash_{17} A^*\cap(B^*\cap C^*) = (A^*\cap B^*)\cap C^*$: $A/A^*, B/B^*, C/C^* \vdash A^{**}\cap(B^{**}\cap C^{**}) = (A^{**}\cap B^{**})\cap C^{**} \vdash_7$ Tw.19.

Df.$\subseteq$: $A\subseteq B \leftrightarrow A\cup B = B$.

Tw20. $A\cup B = B \leftrightarrow A\cap B = A$, bo $A\cup B = B \leftrightarrow A\cap(A\cup B) = A\cap B \leftrightarrow_8 A = A\cap B$.

Tw21. $A\subseteq B \leftrightarrow A\cap B = A$, bo Df.$\subseteq$, Tw.20.

Tw22. $A\subseteq A$, bo Df.$\subseteq$, Tw.3.

Tw23. $A\subseteq B \wedge B\subseteq A \rightarrow A=B$, bo $A\subseteq B, B\subseteq A$, Df.F $\vdash A\cup B = B, B\cup A = A \vdash^1 A=B$.

Tw24. $A\subseteq B \wedge B\subseteq C \rightarrow A\subseteq C$, bo $A\subseteq B, B\subseteq C$, Df.$\subseteq \vdash A\cup B = B, B\cup C = C$ $(A\cup B)\cup C = C$, Df.$\subseteq \vdash A\cup B \subseteq C \vdash A\cap(A\cup B) \subseteq A\cap C$, Tw.8 $\vdash A\cap(A\cup B) = A \vdash A \subseteq A\cap C \vdash A\subseteq C$.

Tw25. $V = \Lambda^*$, bo Df.*: $B/V, A/\Lambda \vdash V = \Lambda^* \leftrightarrow V\cap\Lambda = \Lambda \wedge V\cup\Lambda = V$, Tw.6, Ax3.

Tw26. $\Lambda = V^*$, bo Tw.25 $\vdash V^* = \Lambda^{**} =_7 \Lambda$.

Df.F: $F = N^*$.
Tw27. $N = F^*$, bo Df.F $\vdash F^* = N^{**} =_7 N$.
Df.I: $I = F \cap D$.
Df.P: $P = I^*$.
Tw28. $I = P^*$, bo Df.P $\vdash P^* = I^{**} =_7 I$
Df.Z: $Z = D^*$.
Tw29. $D = Z^*$, bo Df.Z $\vdash Z^* = D^{**} =_7 D$.

Logiczne związki między pojęciami deontycznymi i ich dopełnieniami przedstawia matryca Matr. III:

A	A*
V	Λ
Λ	V
N	F
F	N
Z	D
D	Z
I	P
P	I

Matr.III

Dwoiste (komplementarne) są więc względem siebie V i Λ, N i F, Z i D, I i P.

Tw30. $V \cap V = V \wedge \Lambda \cap \Lambda = \Lambda \wedge N \cap N = N \wedge Z \cap Z = Z \wedge P \cap P = P \wedge F \cap F = F \wedge D \cap D = D \wedge I \cap I = I$, bo Tw.4.
Tw31. $\Lambda \cap V = \Lambda \wedge N \cap V = N \wedge Z \cap V = Z \wedge P \cap V = P \wedge F \cap V = F \wedge D \cap V = D \wedge I \cap V = I$, bo Ax4.
Tw32. $\Lambda \cap \Lambda = \Lambda \wedge N \cap \Lambda = \Lambda \wedge Z \cap \Lambda = \Lambda \wedge P \cap \Lambda = \Lambda \wedge F \cap \Lambda = \Lambda \wedge D \cap \Lambda = \Lambda \wedge I \cap \Lambda = \Lambda \wedge V \cap \Lambda = \Lambda$, bo Tw.6.
Tw33. $P \cap N = N$, bo $P \cap N = I^* \cap N = (F \cap D)^* \cap N =_{18} (F^* \cup D^*) \cap N = (N \cup Z) \cap N =_8 N$.
Tw34. $P \cap Z = Z$, bo $P \cap Z = I^* \cap Z = (F \cap D)^* \cap Z =_{18} (F^* \cup D^*) \cap Z = (N \cup Z) \cap Z =_8 Z$.
Tw35. $F \cap N = \Lambda$, bo $F \cap N = F \cap F^* =_1 \Lambda$.
Tw36. $F \cap Z = Z$, bo Ax7 $\leftrightarrow N^* = (N \cap D)^* =_{18} N^* \cup D^* = F \cup Z \leftrightarrow F = F \cup Z \leftrightarrow_{20} F \cap Z = Z$.

Tw37. $F \cap P = Z$, bo $F \cap P = F \cap I^* = F \cap (F \cap D)^* =_{18} F \cap (F^* \cup D^*) = F \cap (N \cup Z) =^{6} (F \cap N) \cup (F \cap Z) =_{35} \Lambda \cup (F \cap Z) =^{3} F \cap Z =_{36} Z$.

Tw38. $D \cap Z = \Lambda$, bo $D \cap Z = D \cap D^* =_{1} \Lambda$.

Tw39. $D \cap P = N$, bo $D \cap P = D \cap I^* = D \cap (F \cap D)^* =_{18} D \cap (F^* \cup D^*) = D \cap (N \cup Z) =^{6} (D \cap N) \cup (D \cap Z) =_{38} (D \cap N) \cup \Lambda =^{3} D \cap N =^{7} N$.

Tw40. $N \cap Z = \Lambda$, bo $N \cap Z =_{37} N \cap (F \cap P) =_{19} (N \cap F) \cap P =_{35} \Lambda \cap P =_{6} \Lambda$.

Tw41. $I \cap N = \Lambda$, bo $I \cap N = (F \cap D) \cap N =^{2} N \cap (F \cap D) =_{19} (N \cap F) \cap D =_{35} \Lambda \cap D =_{6} \Lambda$.

Tw42. $I \cap Z = \Lambda$, bo $I \cap Z = (D \cap F) \cap Z =^{2} Z \cap (D \cap F) =_{19} (Z \cap D) \cap F =_{38} \Lambda \cap F =_{6} \Lambda$.

Tw43. $I \cap F = I$, bo $I \cap F = (F \cap D) \cap F =^{2} F \cap (F \cap D) =_{19} (F \cap F) \cap D =_{4} F \cap D = I$.

Tw44. $I \cap P = \Lambda$, bo $I \cap P = (F \cap D) \cap P =_{19} F \cap (D \cap P) =_{39} F \cap N =_{35} \Lambda$.

Tw45. $I \cap D = I$, bo $I \cap D = (F \cap D) \cap D =_{19} F \cap (D \cap D) =_{4} F \cap D = I$.

Na podstawie Ax7, Df.F, Df.I, Df.P, Df.Z i twierdzeń Tw30-Tw45 notujemy kolejną matrycę Matr.IV (na określenie wartości iloczynu pojęć deontycznych):

$\cap$	V	Λ	N	Z	P	F	D	I
V	V	Λ	N	Z	P	F	D	I
Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ
N	N	Λ	N	Λ	N	Λ	N	Λ
Z	Z	Λ	Λ	Z	Z	Z	Λ	Λ
P	P	Λ	N	Z	P	Z	N	Λ
F	F	Λ	Λ	Z	Z	F	I	I
D	D	Λ	N	Λ	N	I	D	I
I	I	Λ	Λ	Λ	Λ	I	I	I

Matr.IV

Tw46. $A \cap B = C \leftrightarrow A^* \cup B^* = C^*$, bo $A \cap B = C \leftrightarrow (A \cap B)^* = C^* \leftrightarrow_{18} A^* \cup B^* = C^*$.

W oparciu o twierdzenie Tw46 otrzymujemy twierdzenia dwoiste do tez Tw30-Tw45, Ax7 i Df.I:

Tw30*. $\Lambda \cup \Lambda = \Lambda \wedge V \cup V = V \wedge F \cup F = F \wedge D \cup D = D \wedge I \cup I = I \wedge N \cup N = N \wedge Z \cup Z = Z \wedge \quad P \cup P = P$,

Tw31*. $F \cup \Lambda = F \wedge D \cup \Lambda = D \wedge I \cup \Lambda = I \wedge N \cup \Lambda = N \wedge Z \cup \Lambda = Z \wedge P \cup \Lambda = P$, Tw32*. $\Lambda \cup V = V \wedge F \cup V = V \wedge D \cup V = V \wedge I \cup V = V \wedge N \cup V = V \wedge Z \cup V = V \wedge P \cup V = V$,

Tw33*. $I \cup F = F$, Tw34*. $I \cup D = D$, Tw35*. $N \cup F = V$, Tw36*. $N \cup D = D$,

Tw.37. $N \cup I = D$, Tw38*. $Z \cup D = V$, Tw39*. $Z \cup I = V$, Tw40*. $F \cup D = V$,

Tw41*. $P \cup F = V$, Tw42*. $P \cup D = V$, Tw43*. $P \cup N = P$,

Tw44*. $P \cup I = V$, Tw45*. $P \cup Z = P$, Ax7*. $F \cup Z = F$, Df.I*. $P = N \cup Z$.

Przytoczone związki dwoiste zestawiamy w matrycy Matr.V (na określenie wartości sumy pojęć deontycznych):

∪	V	Λ	N	Z	P	F	D	I
V	V	V	V	V	V	V	V	V
Λ	V	Λ	N	Z	P	F	D	I
N	V	N	N	P	P	V	D	D
Z	V	Z	P	Z	P	F	V	F
P	V	P	P	P	P	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V	F
D	V	D	D	V	V	V	D	D
I	V	I	D	F	V	F	D	I

Matr.V

Definiujemy na koniec:

(A jest sprzeczne względem B) $\leftrightarrow$ A = B*;

(A jest przeciwne względem B) $\leftrightarrow$ A $\subseteq$ B*;

(A jest podprzeciwne względem B) $\leftrightarrow$ A* $\subseteq$ B.

Stąd między pojęciami deontycznymi w następujących parach zachodzi:

– sprzeczność: {V, Λ}, {N, F}, {Z, D}, {I, P};
– przeciwieństwo: {Z, N};
– podprzeciwieństwo: {F, D}.

BIBLIOGRAFIA

Dubish R.: Lattices to Logic, New York 1964.

Hilpinen R.: Deontic Logic, [w:] L. Goble (ed.), The Blackwell Guide to Philosophical Logic, Oxford 2001.

K a l i n o w s k i J.: Logika norm, Lublin 1972.
T o k a r z M.: Wprowadzenie do logiki, Katowice 1984.
W o j c i e c h o w s k a A.: Elementy logiki i teorii mnogości, Warszawa 1979.

ALGEBRA OF DEONTIC NOTIONS

S u m m a r y

Leibniz suggested that deontic modalities can be defined in terms of the alethic modalities; according to him, the permitted (*licitum*) is what possible for a good man to do and the obligatory (*debitum*) is what is necessary for a good man to do. The paper starts from specifying a connection of deontic concepts with the moral values. The connection comes down to define an isomorphism of two Boolean algebras: from deontic one onto axiological one. The work presents theories of two algebras of deontic notions: the algebra of sets and the Boolean algebra.

The theory of deontic set is based on the two axioms: $x \in V$ (an act x is an element of the set of acts subordinated to some norm or law) and $x''=x$ (an act x is identical with double denial of x). By means of definitions following notions are introduced: Λ (the empty set of acts), N (the set of ordered acts), Z (the set of forbidden acts), P (the set of obligatory acts), F (the set of optional acts), D (the set of permitted acts), I (the set of indifferent acts).The calculus is structured by rules of the Słupecki-Borkowski's suppositional deduction. Forty five theorems are proven in this calculus.

The second theory presented in the paper, is a Boolean algebra of deontic notions. Added to the theory of equality, it takes axioms from the theory of Boolean algebras with addition of a specific axiom for the deontic system i.e., $N = N \cap D$. Sixty four theorems are proven in this calculus.

Summarised by Edward Nieznański

Słowa kluczowe: pojęcia deontyczne, modalności deontyczne, związek pojęć deontycznych z wartościami moralnymi, algebra zbiorów, algebra Boole'a.

Key words: deontic notions, deontic modalities, connection of deontic concepts with the moral values, algebra of sets, the Boolean algebra.

Information about Author: Prof. Dr EDWARD NIEZNAŃSKI – Chair of Logic, Institute of Philosophy, Cardinal Stefan Wyszynski University; address for correspondence: ul. Dewajtis 5, PL 01-815 Warszawa; e-mail: eden@stegny.2a.pl