PRZEGLĄD PSYCHOLOGICZNY, 2001, TOM 44, Nr 4, 405-423

Zgodność ocen ryzykowności z modelami oczekiwanego ryzyka
(część 1)

Joanna Sokołowska[1]
Instytut Psychologii Polskiej Akademii Nauk

VIOLATIONS OF THE EXPECTATION PRINCIPLE IN RISK JUDGEMENT:
AN EMPIRICAL PROOF (PART 1)

Abstract. In two experiments risk judgment for a set of descriptions of risky investments were collected from managers and students in Poland. Using the approach similar to this proposed by Keller, Sarin and Weber (1986), it has been investigated whether actual risk rates conform with the multiplication and addition properties as well as with the independence conditions required by the expectation principle. Risk judgments of a majority of managers and students have conformed with the multiplication and addition properties but they have violated the double independence condition. Thus, one may conclude that the models of expected risk do not describe accurately risk perception. So, in part 2 of this article, a dimensional model of perceived risk is proposed, as a more accurate descriptive model of perceived risk.

RYZYKO JAKO ZMIENNA FENOMENOLOGICZNA

W tradycyjnym modelu wyboru przyjmuje się, że kiedy nie jesteśmy pewni tego, co się zdarzy, ale znamy możliwe konsekwencje i ich prawdopodobieństwa, to racjonalnym kryterium wyboru jest maksymalizacja wartości oczekiwanej (EV), czyli sumy wszystkich możliwych wyników ważonych przez ich prawdopodobieństwa[2]. Decyzja jest więc podejmowana na podstawie jednego kryterium, którym jest maksymalizacja średniego zysku. Tak więc ryzyko nie jest traktowane jako niezależna zmienna psychologiczna i możliwe kryterium wyboru ani w podstawowym modelu, ani w jego kolejnych rozszerzeniach (np. Kahneman, Tversky, 1979; Quiggin, 1982; Lopes, 1990; 1996; Tversky, Kahneman, 1992).

Jest to sprzeczne z wynikami empirycznymi i z obserwacjami codziennych decyzji wskazującymi, że ludzie oceniają ryzyko i wykorzystują tę ocenę przy podejmowaniu decyzji. Ocena ryzykowności loterii, zawodów, aktywności sportowej czy nowych technologii zazwyczaj nie sprawia ludziom kłopotów (np. Weber, Bottom, 1989; Shapira, 1994; Sokołowska, Tyszka, 1995; Brachinger, Weber, 1997). Ważne jest także, że oceny ryzyka są stałe i takie same dla badanych z różnych krajów (Keller, Sarin, Weber, 1986) lub zależne od tych samych aspektów sytuacji (np. Englander i in. 1986; Goszczyńska, Tyszka, Slovic, 1991; Teigen, Brun, Slovic, 1988).

Ludzie nie tylko oceniają ryzyko, ale także posługują się tymi ocenami przy podejmowaniu decyzji. Na przykład przy licencjonowaniu leków czy wyborze źródeł energii, które będą rozwijane w przyszłości, zazwyczaj najpierw definiuje się ryzyko, opierając się na prawdopodobieństwie wypadku lub liczbie ofiar śmiertelnych. Później ryzyko jest porównywane z możliwymi korzyściami. Porównanie jest podstawą decyzji. Jak to ujęli Coombs i Lehner (1981), „Problem oceny ryzyka logicznie poprzedza [...] ocenę jego akceptowalności" (s. 1110).

Wychodząc z powyższego rozumowania, niektórzy badacze (np. Markowitz, 1959; Coombs, 1975; Bell, 1988; 1995; Sarin, Weber, 1993; Jia, Dyer 1996; Jia, Dyer, Butler, 1999) zaproponowali modele wyboru włączające ryzyko jako niezależną zmienną psychologiczną i drugie kryterium wyboru. Przyjęli oni założenie, że wybór w sytuacji ryzykownej stanowi konflikt między „lękiem a zachłannością" (Coombs, 1975). To literackie określenie obrazuje dwa przeciwstawne aspekty sytuacji ryzykownej. Pierwszy – nieprzyjemny – odnosi się do możliwości poniesienia straty. Drugi aspekt – pozytywny – to możliwość zwiększenia zysku dzięki podjęciu ryzyka. Decyzja jest więc podejmowana na podstawie dwóch różnych kryteriów: minimalizacji ryzyka (R) i maksymalizacji możliwych zysków (V).

Przyjęcie modelu wyboru opartego na tych dwóch kryteriach (R-V) wymaga jednak zdefiniowania ryzyka

---

1 Adres do korespondencji: Instytut Psychologii PAN, ul. C. Śniegockiej 10 m. 54, 00-430 Warszawa; e-mail: joanna@atos.psychpan.waw.pl

2 Wartość oczekiwana jest obliczana zgodnie z równaniem: , gdzie *V(X)* oznacza wartość oczekiwaną zakładu *X*, v_i – wartość *i-tego* wyniku, a p_i – prawdopodobieństwo tego wyniku. Później pojęcie wartości wyniku zastąpiono pojęciem subiektywnej wartości, czyli użyteczności (Bernoulli, 1954), a prawdopodobieństwo – określeniem „wagi decyzyjne", które wyrażają psychologiczne przekształcenia na prawdopodobieństwie (Edwards, 1954; 1962; Kahneman, Tversky, 1979; Tversky, Kahneman, 1992).

i określenia jego miary. W artykule najpierw przedstawione są krótko niektóre podstawowe modele oceny ryzyka, proponowane w ramach podejścia R-V, a następnie własne badania empiryczne, w których weryfikowano zgodność formułowanych przez ludzi ocen ryzykowności z założeniami formalnymi, przyjmowanymi w tych modelach.

MODELE OCENY RYZYKA W PODEJŚCIU RYZYKO-WARTOŚĆ

Ryzyko jako funkcja zmienności wyniku: dystrybucyjne modele ryzyka

W pierwszym modelu R-V, zaproponowanym w ekonomii przez Markowitza (1959), przyjmuje się, że wybór jest oparty na dwóch kryteriach: maksymalizacji oczekiwanego zysku (EV) oraz minimalizacji ryzyka (R), które odnosi się do zmienności wyników. W tym modelu miarą ryzyka jest wariancja rozkładu wyników. Zanalizujemy to na przykładzie rzutu monetą, gdzie wyrzucenie orła oznacza wygranie 30 PLN, a wyrzucenie reszki – przegranie 30 PLN. Można to zapisać następująco: X_1: (+30 PLN, 1/2; -30 PLN, 1/2). Jeśli wypłaty zakładu X_1 pomnożymy przez 10, to uzyskamy zakład X_2: (+300 PLN, 1/2; -300 PLN, 1/2). Oba zakłady mają taką samą wartość oczekiwaną (EV = 0) i jednakowe prawdopodobieństwo wygrania i przegrania. Jednak zakład X_2 cechuje większa rozpiętość możliwych wypłat. Jeśli ryzyko jest oceniane na podstawie wariancji rozkładu wyników, to zakład X_2 powinien być oceniany jako bardziej ryzykowny. Wzrost oceny ryzyka wraz ze wzrostem wariancji, kiedy inne cechy zakładu nie ulegają zmianie, nazywany jest własnością multiplikatywności (Coombs, Bowen, 1971).

Coombs (1975), który jako pierwszy wprowadził do psychologii model wyboru typu R-V, weryfikował empirycznie powyższą definicję ryzyka. W badaniach potwierdzono, że oceny ryzyka zachowują własność multiplikatywności, ale jednocześnie wykazano, że nie wynikają one z wielkości wariancji (Coomb, Lehner, 1981; 1984). Stwierdzono bowiem, że takie same zmiany wariancji inaczej wpływają na ocenę ryzyka zależnie od tego, czy wynikają ze zmiany wypłaty pozytywnej, czy negatywnej. Rozważmy trzy następujące zakłady:

(1) Zakład X, w którym z takim samym prawdopodobieństwem można wygrać i przegrać \$10, czyli X: (+\$10,1/2; -\$10,1/2);

(2) Zakład X_1, który uzyskano, zwiększając o \$10 wygraną dla zakładu X, czyli X_1: (+\$20,1/2; -\$10,1/2);

(3) X_2, który uzyskano, zwiększając o \$10 przegraną dla zakładu X, czyli X_2: (+\$10,1/2; -\$20,1/2).

Coombs i Lehner (1984) stwierdzili, że spostrzegana różnica w ryzykowności zakładów X i X_1 była mniejsza niż różnica w ryzykowności zakładów X i X_2. Wynika z tego, że dobre i złe wyniki mają różny (niesymetryczny) wkład w ocenę ryzyka oraz że ocena ryzyka jest dokonywana na podstawie użyteczności i prawdopodobieństwa wyników, a nie na podstawie miary dyspersji. Tak więc modele dystrybucyjne nie mogą trafnie opisywać spostrzeganego ryzyka. Na podstawie tej konkluzji i opierając się na wynikach wieloletnich badań, Coombs i Lehner (1984) zaproponowali dwuliniowy model oczekiwanego ryzyka. Model ten, a także inne modele oceny ryzyka reprezentujące takie założenia, są omówione niżej.

Ryzyko jako funkcja użyteczności i prawdopodobieństwa wyników: modele oczekiwanego ryzyka

Model ważonego ryzyka Coombsa i Lehnera. Coombs i Lehner (1981; 1984) przyjęli, że wszystkie wyniki są ważone przez prawdopodobieństwa i następnie sumowane. Wyniki pozytywne i negatywne są rozpatrywane oddzielnie. Ocena ryzyka jest sumą tych dwóch ocen, przy czym wyniki pozytywne i negatywne mają różny wkład w ocenę ogólną. Proponowany przez nich model można zapisać w następująco:

$$R = \varphi_1(p)\varphi_2(w) + \varphi_3(q)\varphi_4(l) \quad (1)$$

gdzie w i l reprezentują wygraną i stratę, p i q – ich prawdopodobieństwa, φ_1, φ_2, φ_3 i φ_4 – psychologiczne przekształcenia na wartościach i prawdopodobieństwach wyników.

Ze względu na przytoczone wyżej ustalenia empiryczne, autorzy dopuszczają możliwość, że każde przekształcenie może być inne. Jest więc możliwe, że ludzie inaczej oceniają wielkość zysków niż strat oraz inaczej ważą prawdopodobieństwo wygranej niż przegranej. Coombs i Lehner nie zdefiniowali jednak powyższych przekształceń. Próbę taką podjęli inni autorzy.

Model oczekiwanego ryzyka Luce'a i Weber – CER. Luce (1980; 1981) zdefiniował przekształcenia psychologiczne na wynikach, opierając się na obserwacji empirycznej, że ryzykowność zakładu rośnie, kiedy wszystkie jego wypłaty pomnożymy przez stałą większą od 1. Na podstawie rozważań matematycznych Luce wyłonił dwie możliwe miary ryzyka zgodne z własnością multiplikatywności. W obu przypadkach wzrost ocen ryzyka odzwierciedla wpływ zmiany skali (mnożenia) na wyniki zakładu X. Ryzyko zakładu jest więc funkcją przekształcanych wyników i ich prawdopodobieństw – przekształcone wyniki są mnożone przez prawdopodobieństwa i sumowane[3]. W pierwszym modelu przyjmuje się, że przekształcenia psychologiczne na wynikach są opisane za pomocą funkcji logarytmicznej, określanej na obiektywnej wielkości wypłat. Model ten został jednak sfalsyfikowany empirycznie (Brachinger, Weber, 1997; Keller, Sarin, Weber, 1986; Luce, Weber, 1986), więc nie jest tutaj omawiany. W drugim zaproponowanym przez Luce'a modelu przekształcenia psychologiczne na wynikach są opisane za pomocą funkcji potęgowej. W modelu tym, tak samo jak w modelu Coombsa i Lehnera, ocena ryzyka to suma iloczynów prawdopodobieństw i użyteczności wypłat pozytywnych oraz prawdopodobieństw i użyteczności wypłat negatywnych.

Korygując i rozszerzając model potęgowy Luce'a, Luce i Weber (1986) zaproponowali aksjomatyczny model oceny ryzyka – CER, opisany przez równanie (2)[4]:

$$R(p(x)) = A_0 p(x = 0) + A_+ p(x>0) + A_- p(x<0) +$$
$$B_+ EV(x^{k+}) p(x>0) B_- EV(|x|^{k-}) p(x<0), \quad (2)$$

gdzie x i p oznaczają wartość i prawdopodobieństwo wyniku, A_0, A_+, A_- – wagi prawdopodobieństw wyników neutralnych, pozytywnych i negatywnych, B_+ *oraz* B_- – wagi oczekiwanej użyteczności wyników pozytywnych negatywnych, natomiast $k+$ *i* $k-$ – wykładniki funkcji potęgowej, która opisuje przekształcenia psychologiczne na wartości wyników pozytywnych i negatywnych. $EV(x^{k+})$ i $EV(x^{k-})$ oznaczają wartość oczekiwaną wyników pozytywnych i negatywnych. Funkcja użyteczności jest funkcją potęgową zarówno dla wyników pozytywnych, jak i negatywnych. Zakłada się jednak, że wykładnik tej funkcji może się różnić w obu przypadkach. Nie zakłada się żadnej transformacji na prawdopodobieństwach. Oczekiwana użyteczność wyników pozytywnych jest następnie mnożona przez całkowite prawdopodobieństwo wyników pozytywnych. Analogiczna operacja jest przeprowadzana dla wyników negatywnych. Stąd w pracy Luce'a i Weber (1986) mówi się o „warunkowym oczekiwaniu”[5].

Wykładniczy model oczekiwanego ryzyka Sarina. W badaniach wykazano, że oceny ryzyka mają inną jeszcze własność oprócz multiplikatywności. Otóż ryzykowność zakładu obniża się, kiedy do wyników dodajemy pozytywną stałą, tj. kiedy wzrasta wartość oczekiwana zakładu (Coombs, Huang, 1970; Keller, Sarin, Weber, 1986). Własność tę nazwano własnością addytywności. Przyjęta w modelu CER (dla opisu przekształceń psychologicznych na wynikach) funkcja potęgowa jest zgodna z własnością multiplikatywności, ale model ten nie zachowuje własności addytywności (por. Aneks 1). W tej sytuacji Sarin (Sarin, Weber, 1993; Brachinger, Weber, 1997), przyjmując tak jak Luce, że zmiana ocen ryzyka zakładu odzwierciedla wpływ transformacji na jego wyniki, poszukuje funkcji użyteczności, która jest zgodna z własnością addytywności. Z tych założeń Sarin

---

3 Czyli ryzykowność transformowanego zakładu jest równa wartości oczekiwanej przekształconych wyników tego zakładu.

4 Oryginalny zapis tego modelu jest następujący: $R(X) = A(0)P(X=0) + A(+)P(X>0) + A(-)P(X<0) + B(+)E[X^{k(+)}]P(X>0) + B(-)E[X^{k(-)}]P(X<0)$.

5 Przyjęty przez autorów formalizm ma na celu podkreślenie odrębności oceny wyników pozytywnych i negatywnych. W sensie psychologicznym oznacza to następujący przebieg procesu oceny ryzyka. Zakład, w którym można otrzymać kilka różnych wyników – pozytywnych i negatywnych – jest dzielony na dwa odrębne zakłady. Jeden z nich zawiera tylko wyniki pozytywne, a drugi tylko negatywne. Dla każdego zakładu wyliczana jest wartość oczekiwana. Należy pamiętać, że przy takim myśleniu prawdopodobieństwa wyników w każdym z dwóch zakładów sumują się do 1. Wobec tego przy integracji dwóch wartości oczekiwanych – dla zakładu z pozytywnymi i dla zakładu z negatywnymi wynikami – musi być uwzględniony rozkład prawdopodobieństw, który występował w zakładzie oryginalnym, tj. przed „podzieleniem” go na dwa zakłady. Służy temu mnożenie dwóch wartości oczekiwanych przez wyjściowe prawdopodobieństwa. Ponieważ w modelu CER zakłada się, że prawdopodobieństwa nie podlegają transformacji nieliniowej, to warunkowe oczekiwanie dla wyników pozytywnych jest równe oczekiwanej wygranej, a warunkowe oczekiwanie dla wyników negatywnych równa się oczekiwanej stracie.

wyprowadza model oceny ryzyka, w którym ta ocena jest sumą iloczynów prawdopodobieństw i użyteczności wypłat, określanej przez funkcję wykładniczą na obiektywnych wartościach – równanie (3):

(3)

gdzie *x* i *p* oznaczają wartość i prawdopodobieństwo wyniku. Przyjmuje się, że K>0, ponieważ ocena ryzyka nie przyjmuje wartości ujemnych. Ze względu na cytowane wcześniej ustalenia empiryczne Sarin wprowadza rozróżnienie między wagą wyników pozytywnych i negatywnych przy ocenie ryzyka. Aby waga strat była większa niż zysków, funkcja wykładnicza dla wartości negatywnych (strat) musi rosnąć szybciej niż dla wartości pozytywnych (zysków). To z kolei oznacza, że c<0 (por. Aneks 1).

Model Sarina i model potęgowy Luce'a różnią się ze względu na to, która własność ocen ryzyka jest przez nie wyjaśniana – addytywności czy multiplikatywności. Wobec tego w celu sprawdzenia trafności obu modeli w badaniach własnych sprawdzano zgodność ocen ryzyka z obiema własnościami. Własności te nie wyczerpują jednak wszystkich warunków formalnych, których zachowania wymagają opisane modele. Zagadnienie to jest omawiane niżej.

Wymagania formalne modeli oczekiwanego ryzyka. We wszystkich omawianych w tej sekcji modelach ryzyko jest obliczane analogicznie do oczekiwanej użyteczności, tj. ryzyko jest sumą iloczynów wszystkich wyników mnożonych przez ich prawdopodobieństwa. Tak więc, analogicznie jak w przypadku zasady oczekiwanej użyteczności, ryzyko zakładu jest równe sumie oczekiwanej ryzykowności jego komponent. Zasada ta zwana jest zasadą oczekiwanego ryzyka (Huang, 1971) i implikuje te same warunki, które implikuje zasada oczekiwanej użyteczności, tj. przechodniości, monotoniczności i niezależności. Ponieważ omawiane modele opierają się na zasadzie oczekiwanego ryzyka, ocena ich trafności wymaga sprawdzenia zgodności ocen ryzyka z implikacjami tej zasady. Mimo że we wczesnych badaniach ustalono, iż zasada oczekiwanego ryzyka jest przestrzegana (Coombs, Bowen, 1971; Aschenbrenner, 1978), to nowsze wyniki eksperymentalne wykazują jednak, że oceny ryzykowności nie zawsze są z nią zgodne (Keller, Sarin, Weber, 1986; Weber, Bottom, 1989; 1990). W tej sytuacji w badaniach własnych sprawdzano zgodność ocen ryzyka z warunkami niezależności, implikowanymi przez zasadę oczekiwanego ryzyka. Warunki te są następujące:

(1) dla każdej z dwóch loterii porządek ryzykowności powinien pozostawać taki sam, kiedy obie loterie są poddane tej samej transformacji (np. w obu loteriach wszystkie wyniki są mnożone przez tę samą stałą lub taka sama stała jest dodana do wszystkich wyników);

(2) jeśli określona transformacja skali (np. mnożenie wypłat przez 2) powoduje mniejszą zmianę w ocenie ryzykowności niż inna transformacja (np. mnożenie przez 3), kiedy są zastosowane do loterii X, to obie transformacje powinny wpływać w ten sam sposób na oceny ryzykowności innej loterii Y, kiedy są do niej zastosowane.

Zgodność rzeczywistych ocen ryzyka z własnościami multiplikatywności i addytywności oraz z warunkami niezależności była weryfikowana w dwóch omówionych niżej eksperymentach.

METODA

Eksperyment 1[6]

Badanie przeprowadzono z udziałem 215 menedżerów, studentów zaocznych w niepublicznej Wyższej Szkole Biznesu i Przedsiębiorczości w Warszawie w roku akademickim 1997/1998. Badanego proszono, aby założył, że jest dyrektorem naczelnym prywatnej firmy średniej wielkości. Firma ta jak dotąd dobrze sobie radziła, ale ostatnio ma pewne kłopoty i w tym roku przewiduje się spadek zysku. Można jednak dokonać inwestycji. Ich powodzenie przyniesie wzrost zysku, natomiast niepowodzenie spowoduje jego dodatkowy spadek. Następnie menedżerom przedstawiano szczegółowe opisy 18 sytuacji, które zawierały dokładne informacje o szansach na powodzenie i niepowodzenie inwestycji oraz o wielkości zysków i strat w obu przypadkach. Szanse na sukces i niepowodzenie inwestycji były wyrażane liczbą (w %) głosów ekspertów, którzy przewidywali sukces lub porażkę. Wielkość wypłat była określana w stosunku do *status quo*, tj. w stosunku do założonego w bieżącym roku zysku bez inwestycji[7].

Menedżerowie oceniali ryzykowność 18 sytuacji na 11-stopniowej skali Likerta. Dziewięć sytuacji z pierwszego zestawu – to sytuacje o wartości oczekiwanej równej zero, różniące się wielkością wariancji (64,225,625) oraz prawdopodobieństwem niepowodzenia inwestycji (30%, 50%, 70%) – por. tabela 1. Dziewięć sytuacji z drugiego zestawu miało taką samą wariancję (625), ale różną wartość oczekiwaną (+10,0, -10) i różne prawdopodobieństwo niepowodzenia (30%, 50%, 70%) – por. tabela 3. Sytuacje były konstruowane na podstawie schematu zaproponowanego przez Kellera, Sarina, Webera (1986).

Eksperyment 2

Ograniczenia w konstrukcji ocenianych sytuacji – wynikające z konieczności zachowania ich realizmu wobec danych statystycznych – oraz chęć ustalenia wpływu specyfiki badanej populacji (menedżerowie) na wyniki uzyskane w eksperymencie 1 były powodem przeprowadzenia podobnego eksperymentu z grupą 90 studentów Szkoły Wyższej Psychologii Społecznej w Warszawie w roku akademickim 1999/2000. Zastosowano podobny schemat badania. Najpierw studenci czytali ogólny opis sytuacji ryzykownej. Badanego proszono, aby założył, że jest dyrektorem/prezesem polskiej firmy handlowej, która ma sieć sklepów spożywczych, oraz że zgłosił się do niego zagraniczny inwestor z propozycją założenia *joint venture* w celu wybudowania dużego supermarketu. Następnie studentom przedstawiano szczegółowe opisy 24 sytuacji, które zawierały dokładne informacje o szansach na powodzenie i niepowodzenie inwestycji oraz o wielkości zysków i strat w obu przypadkach. Badani oceniali na 11-stopniowej skali Likerta ryzykowność dwóch zestawów sytuacji. Zestaw 1, tak jak w eksperymencie 1, składał się z 9 sytuacji o wartości oczekiwanej 0, które różniły się wielkością wariancji (625,1225,2025) oraz prawdopodobieństwem niepowodzenia inwestycji (30%, 50%, 70%) – por. tabela 1. Użyto więc sytuacji o większej zmienności wyników niż w eksperymencie 1. Natomiast 15 sytuacji z drugiego zestawu miało taką samą wariancję (625), ale różną wartość oczekiwaną (+100,0, -100) i prawdopodobieństwo niepowodzenia (15%, 30%, 50%, 70%, 85%) – por. tabela 4. W porównaniu z eksperymentem 1 rozszerzono analizowany zakres prawdopodobieństwa.

WYNIKI

Czy oceny ryzyka zachowują własność multiplikatywności, tj. rosną, kiedy zwiększa się zmienność wyników?

Aby odpowiedzieć na to pytanie, zanalizowano oceny ryzykowności dla 9 sytuacji z pierwszego zestawu – por. tabela 1, formułowane przez menedżerów i studentów.

Tabela 1.

Zestaw 9 sytuacji o EV = 0 do testowania własności multiplikatywności, ocenianych w eksperymencie 1 i 2[8]

Wariancja	Prawdopodobieństwo niepowodzenia = 30%	Prawdopodobieństwo niepowodzenia = 50%	Prawdopodobieństwo niepowodzenia = 70%

6 Eksperyment 1 wchodzi w skład szerszego projektu badawczego. Współautorem tego projektu oraz eksperymentu 1 jest dr Kornel Świątnicki.

7 Wielkość dotychczasowego i przewidywanego zysku firmy, wielkość zmian oraz wielkość wypłat pozytywnych i negatywnych dla konkretnych sytuacji była ustalona na podstawie danych statystycznych. Opierając się na tych informacjach, w scenariuszu przyjęto dotychczasowy zysk netto równy 200 tysięcy PLN, przewidywany zysk – 100 tysięcy PLN, a maksymalny rozrzut wyników – 60 tysięcy PLN (var = 625).

8 W tabeli 1 wypłaty dla menedżerów są podane w tysiącach PLN i określane w stosunku do *status quo*. Wypłaty dla studentów są także podawane w tysiącach PLN, ale były one określane w sposób bezwzględny.

	Sytuacje prezentowane menedżerom (eksp. 1)		
64	+ 5,70% -12,30%	+ 8,50% - 8,50%	+12,30% - 5,70%
225	+10,70% -23,30%	+15,50% -15,50%	+23,30% -10,70%
625	+16,70% -38,30%	+25,50% -25,50%	+38,30% -16,70%

ZGODNOŚĆ OCEN RYZYKOWNOŚCI Z MODELAMI OCZEKIWANEGO RYZYKA

	Sytuacje prezentowane studentom (eksp. 2)		
625	+160,70% –380,30%	+250,50% -250,50%	+380,30% -160,70%
1225	+230,70% -530,30%	+350,50% -350,50%	+530,30% -230,70%
2025	+290,70% -690,30%	+450,50% -450,50%	+690,30% -290,70%

Sprawdzano, czy oceny ryzyka wzrastają wraz ze wzrostem wariancji (na skutek pomnożenia wypłat przez stałą większą od 1) dla sytuacji o tej samej skośności[9], tj. w kolumnach. Analizy przeprowadzono na danych indywidualnych – dla każdego badanego obliczano, ile par sytuacji było ocenianych niezgodnie z powyższą zasadą. Ponieważ badani oceniali ryzykowność sytuacji na skali Likerta, zgodność wzrostu ocen ryzyka wraz ze wzrostem wariancji była sprawdzana przy założeniu słabej relacji porządkującej (≥). Jedynie 24% menedżerów i studentów zawsze dokonywało ocen w zgodzie ze słabym warunkiem multiplikatywności. Jeśli przyjmiemy jedno odstępstwo od tej reguły za wynik nieuwagi, to zgodność z zasadą multiplikatywności wykazują oceny 65-69% badanych. Nie zaobserwowano różnic między menedżerami i studentami. Wyniki są podane w tabeli 2.

Tabela 2.
Zgodność ocen ryzyka z własnością multiplikatywności

Ilość uporządkowań niezgodnych z własnością multiplikatywności:	0	1	2	3
Procent menadżerów (N = 215)	24%	41%	29%	6%
Procent studentów (N = 90)	24%	45%	24	7%

Czy oceny ryzyka zachowują własność addytywności, tj. maleją, kiedy wypłaty „poprawiają się”?

Odpowiedzi na to pytanie dostarcza analiza ocen ryzykowności sytuacji z drugiego zestawu, tj. dziewięciu sytuacji ocenianych przez menedżerów (por. tabela 3) oraz piętnaście sytuacji ocenianych przez studentów (por. tabela 4).

9 Skośność w tych badaniach jest definiowana jako stosunek prawdopodobieństwa zysku do prawdopodobieństwa porażki.

Tabela 3.
Zestaw 9 sytuacji o Var = 625 do testowania własności addytywności, ocenianych przez menedżerów w eksperymencie 1

Stała dodana do wypłat	Prawdopodobieństwo niepowodzenia = 30%	Prawdopodobieństwo niepowodzenia = 50%	Prawdopodobieństwo niepowodzenia = 70%
+10	+26,70% -28,30%	+35,50% -15,50%	+48,30% - 6,70%
0	+16,70% -38,30%	+25,50% -25,50%	+38,30% -16,70%
-10	+6,70% -48,30%	+15,50% -35,50%	+28,30% -26,70%

Tabela 4.
Zestaw 15 sytuacji o Var = 625 do testowania własności addytywności, ocenianych przez studentów w eksperymencie 2

Stała dodana do wypłat	Prawdopodobieństwo niepowodzenia = 15%	Prawdopodobieństwo niepowodzenia = 30%	Prawdopodobieństwo niepowodzenia = 50%	Prawdopodobieństwo niepowodzenia = 70%	Prawdopodobieństwo niepowodzenia = 85%
+100	+210,85% -500,15%	+260,70% -280,30%	+350,50% -150,50%	+480,30% -60,70%	+700,15% -10,85%
0	+110,85% -600,15%	+160,70% -380,30%	+250,50% -250,50%	+380,30% -160,70%	+600,15% -110,85%
-100	+10,85% -700,15%	+60,70% -480,30%	+150,50% -350,50%	+280,30% -260,70%	+500,15% -210,85%

Zgodnie z własnością addytywności dla analizowanych sytuacji, ocena ryzyka powinna wzrastać wraz ze spadkiem wartości oczekiwanej (na skutek odjęcia stałej od obu wypłat) dla sytuacji o tej samej skośności, tj. w kolumnach. Dla każdego badanego obliczano, ile par sytuacji było ocenianych niezgodne z tą zasadą. Zgodność była sprawdzana przy założeniu słabej relacji porządkującej (≥); 35% menedżerów oceniło ryzykowność zakładów, nigdy nie łamiąc słabego warunku addytywności, a u 37% zaobserwowano jedno odstępstwo od tej zasady. Oceny studentów, dla których zgodność była analizowana w odniesieniu do większego zbioru, zachowywały własność addytywności w podobnym stopniu: 19% badanych nigdy nie łamało tego warunku, u 25% studentów zaobserwowano jedną niezgodność i u 23% – dwie niezgodności. W przypadku obu grup własność addytywności była zachowana w ocenach około 70% badanych, tj. ocena ryzyka malała, jeśli wszystkie wypłaty zakładu „poprawiały się”. Wyniki są przedstawione w tabeli 5.

Tabela 5.
Zgodność ocen ryzyka z własnością addytywności

Ilość uporządkowań niezgodnych z własnością addytywności	0	1	2	3	4	5
Procent menadżerów (N = 215)	35%	37%	17%	11%	–	–
Procent studentów (N = 90)	19%	25%	23%	19%	12%	2%

Czy oceny ryzyka zachowują warunki niezależności?

Do badania zgodności ocen ryzyka z warunkami niezależności wykorzystano oceny dla wszystkich sytuacji przedstawionych w tabelach 1, 3 i 4.

Zacznijmy od zestawu dziewięciu sytuacji z tabeli 1 ocenianych przez menedżerów. Wszystkie sytuacje mają jednakową wartość oczekiwaną, ale różną wariancję, która się zmienia w każdej kolumnie, oraz różną skośność, która się zmienia w każdym wierszu. Dla tych sytuacji niezależność wymaga identycznego uporządkowania ocen ryzykowności dla: (1) trójek zakładów o takiej samej wariancji na skutek zmian prawdopodobieństwa straty, tj. we wszystkich wierszach, ponieważ zgodnie z pierwszym warunkiem niezależności poddanie kilku sytuacji tej samej transformacji (np. pomnożenie ich wypłat przez 3) nie powinno zmieniać ich uporządkowania ze względu na ryzykowność;

(2) trójek zakładów o takim samym poziomie prawdopodobieństwa straty na skutek zmian wariancji, tj. we wszystkich kolumnach; zgodnie z drugim warunkiem niezależności, jeśli dana transformacja skali (np. mnożenie przez 2) powoduje mniejszą zmianę w ocenie ryzykowności niż inna transformacja (np. mnożenie przez 3), to zależność ta powinna być prawdziwa w odniesieniu do każdej sytuacji.

Dla każdego badanego zachowanie warunków niezależności było sprawdzane w ten sposób, że porównywano uporządkowanie ocen ryzykowności w każdych z dwóch wierszy (trzy porównania), tj. (a) wiersz 1 i 2, (b) wiersz 2 i 3, (c) wiersz 1 i 3, oraz w każdej parze kolumn (trzy porównania), tj. (a) kolumna 1 i 2, (b) kolumna 2 i 3, (c) kolumna 1 i 3. W tabeli 6 przedstawiony jest schemat, którym się posługiwano, dokonując porównań.

Tabela 6.
Porównania ocen ryzykowności dla dziewięciu zakładów o stałej EV = 0,3 poziomach VAR i p_l w eksperymencie 1

VAR	p_l = 30%	p_l = 50%	p_l = 70%
64	R_{1_1}	R_{1_2}	R_{1_3}
225	R_{2_1}	R_{2_2}	R_{2_3}
625	R_{3_1}	R_{3_2}	R_{3_3}

Na przykład porównania dla kolumny 1 i 2 to porównania ocen ryzyka dla następujących par: R_{1_1} *vs.* R_{1_2}, R_{2_1} *vs.* R_{2_2} i R_{3_1} *vs.* R_{3_2}. Jeśli porządek ryzykowności dla tych trzech par nie jest identyczny (tj. jedna para miała inny porządek ocen ryzykowności niż dwie pozostałe), to warunek niezależności nie jest zachowany. Dla każdej osoby obliczono łączną ilość takich niezgodnych uporządkowań. Identyczne analizy wykonano na ocenach ryzykowności formułowanych przez studentów dla analogicznego zbioru dziewięciu sytuacji (por. tabela 1). Wyniki są podane w tabeli 7.

Tabela 7.
Zgodność ocen ryzykowności z warunkami niezależności dla pierwszego zestawu sytuacji (EV = 0) w eksperymencie 1 i 2

Ilość uporządkowań niezgodnych z warunkiem niezależności	Stałość uporządkowania ocen ryzyka w wierszach				Stałość uporządkowania ocen ryzyka w kolumnach				Podwójna niezależność, tj. stałość uporządkowania w kolumnach i w wierszach			
	Menedżerowie		Studenci		Menedżerowie		Studenci		Menedżerowie		Studenci	
	%	Skumulowany %	%	Skumulowany %	%	Skumulowany %	%	Skumulowany %	%	Skumulowany %	%	Skumulowany %
0	22,3	22,3	18,2	18,2	24,7	24,7	19,3	19,3	12,1	12,1	3,3	3,3

1	34,4	**56,7**	35,2	**53,4**	27,0	**51,6**	33,8	**53,1**	11,6	23,7	19,2	22,5
2	28,8	85,6	31,8	85,2	30,9	82,3	30,8	83,9	23,7	47,4	14,6	37,1
3	14,4	100	14,8	100	17,7	100	17,0	100	18,1	65,6	29,4	66,5
4									16,3	81,9	17,9	84,4
5									10,7	92,6	10,1	94,5
6									7,4	100	4,5	100

Z tabeli 7 wynika, że jeśli dopuścimy jedno odstępstwo jako wynik nieuwagi, to około 50% badanych oceniało ryzykowność alternatyw zgodnie z pierwszym lub z drugim warunkiem niezależności. Jednak oba warunki łącznie są zachowane jedynie przez oceny mniej niż 25% menadżerów i studentów.

Dla drugiego zestawu sytuacji ocenianych przez menedżerów (por. tabela 3), tj. dziewięciu sytuacji o jednakowej wariancji, ale różnej wartości oczekiwanej oraz różnej skośności, niezależność wymaga identycznego uporządkowania ocen ryzykowności:

(1) sytuacji o takiej samej EV na skutek zmiany prawdopodobieństwa straty, tj. takiego samego uporządkowania trójek sytuacji w każdym wierszu;

Tabela 8.

Zgodność ocen ryzykowności z warunkami niezależności dla drugiego zestawu sytuacji w eksperymencie 1 i 2[10]

Ilość uporządkowań niezgodnych z warunkiem niezależności	Stałość uporządkowania ocen ryzyka w wierszach				Stałość uporządkowania ocen ryzyka w kolumnach				Podwójna niezależność, tj. stałość uporządkowania w kolumnach i w wierszach			
	Menedżerowie		Studenci		Menedżerowie		Studenci		Menedżerowie		Studenci	
	%	Skumulowany %	%	Skumulowany %	%	Skumulowany %	%	Skumulowany %	%	Skumulowany %	%	Skumulowany %
0	35,3	35,3	20,2	20,2	14,0	14,0	2,2	2,2	8,4	8,4	0,0	0,0
1	38,1	**73,5**	45,0	**65,2**	30,2	**44,2**	5,6	7,8	17,2	25,6	2,2	2,2
2	14,0	87,4	34,8	100	27,9	72,1	1,1	8,9	19,5	45,1	4,5	6,7
3	12,6	100	0,0		27,9	100	9,0	17,9	22,8	67,9	2,2	8,9
4	-	-	-	-	-	-	5,6	**23,5**	17,7	85,6	7,9	16,8
5	-	-	-	-	-	-	8,0	31,5	8,4	94,0	6,7	23,5
6	-	-	-	-	-	-	14,6	46,0	6,0	100	9,0	32,5
7	-	-	-	-	-	-	15,7	61,7	-	-	10,1	42,6
8	-	-	-	-	-	-	7,9	69,6	-	-	5,6	48,2
9 i więcej	-	-	-	-	-	-	30,3	100	-	-	51,8	100

(2) sytuacji o takiej samej skośności, kiedy zmienia się EV, tj. takiego samego uporządkowania trójek sytuacji w każdej kolumnie.

Liczba uporządkowań niezgodnych z tymi warunkami była liczona tak samo jak poprzednio. Takie same analizy wykonano dla zestawu piętnastu sytuacji z tabeli 4, ocenianych przez studentów. Wyniki są przedstawione

10 W tym przypadku, tak jak poprzednio, mamy trzy porównania dla wierszy, ale dziesięć porównań dla kolumn, ponieważ użyto pięciu poziomów prawdopodobieństwa straty.

w tabeli 8.
Z tabeli 8 wynika, że oceny większości badanych (73 i 65%) dobrze zachowują pierwszy warunek niezależności, tj. o zachowaniu porządku ryzykowności przez kilka sytuacji, które poddane są tej samej transformacji. W tym przypadku jest to dodanie stałej do wypłat. Gorzej zachowany jest drugi warunek, tj. o takim samym wpływie określonej transformacji na różne sytuacje. W tym przypadku odnosi się to do wpływu zmiany wielkości wypłat poprzez dodanie stałej na ocenę ryzykowności sytuacji, różniących się wielkością prawdopodobieństwa straty. Jedynie 44% badanych menedżerów (uwzględniając jeden błąd) i 23% studentów (trzy błędy) oceniało ryzykowność zgodnie z tym warunkiem. Podobnie jak dla poprzedniego zestawu sytuacji, w tym przypadku także oba warunki niezależności były zachowane przez zdecydowaną mniejszość badanych. Jedynie około 25% menedżerów (jedna niezgodność) i tylko 9% studentów (trzy niezgodności) oceniało ryzykowność w zgodzie z obydwoma warunkami niezależności.

Wnioski na temat trafności modeli oczekiwanego ryzyka

Zreferowane wyżej wyniki badań nad wpływem transformacji sytuacji ryzykownej na ocenę ryzyka są zgodne z wcześniejszymi ustaleniami empirycznymi (Coombs, Bowen, 1971; Coombs, Lehner, 1981; 1984; Keller, Sarin, Weber, 1986). Wyniki obu eksperymentów wskazują jasno, że zarówno własność addytywności, jak i multiplikatywności jest zachowana w ocenie ryzyka formułowanej przez większość badanych menedżerów i studentów.
Jednocześnie zaobserwowano, że oceny ryzykowności są zgodne z obydwoma warunkami niezależności dla mniej niż jednej czwartej badanych. Brak zgodności ocen ryzyka z warunkami niezależności kwestionuje trafność empiryczną modeli opartych na zasadzie oczekiwanego ryzyka. Wniosek ten jest zgodny z wcześniejszymi ustaleniami empirycznymi, wskazującymi na niezgodność rzeczywistych ocen ryzyka z zasadą oczekiwanego ryzyka (Keller, Sarin, Weber, 1986; Weber, Bottom, 1989; 1990). Weber tłumaczy to nieprzestrzeganiem przez ludzi zasad rachunku prawdopodobieństwa. W związku z tym, podobnie jak to robiono wcześniej w odniesieniu do modelu preferencji, proponuje ona wprowadzenie do modelu CER nieliniowej funkcji ważonego prawdopodobieństwa (Weber, Bottom, 1989; 1990), a w następnych artykułach – wag konfiguralnych (Weber, Anderson, Birnbaum, 1992). Jest to więc tradycyjny sposób wyjaśniania niezgodności między zachowaniem ludzi a zasadą oczekiwanej użyteczności czy ryzyka poprzez wprowadzanie do modelu modyfikacji, które osłabiają założenia na temat liniowości funkcji, która odzwierciedla przekształcenia psychologiczne na prawdopodobieństwie.
Inny sposób rozwiązywania tego problemu to odrzucenie zasady oczekiwanego ryzyka i przyjęcie innej reguły integracji informacji o użyteczności i prawdopodobieństwie przy ocenie ryzyka. Taką alternatywną regułę proponuje się w dymensjonalnym (addytywnym) modelu oceny ryzyka (Mellers, Ordonez, Birnbaum, 1992; Mellers, Chang, 1994; Sokołowska, 2000; Sokołowska, Pohorille, 2000; Sokołowska, Świątnicki, 2000; 2001). Omówieniu tego modelu oraz jego zgodności z formułowanymi przez ludzi ocenami ryzyka poświęcona jest druga część artykułu.

BIBLIOGRAFIA

Aschenbrenner, K. M. (1978). Single-peaked risk preferences and their dependability on the gambles presentation mode. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance,* 4, 513-520.
Bell, D. E. (1988). One-switch utility functions and measures of risk. *Management Science,* 34, 1416-1424.
Bell, D. E. (1995). Risk, return, and utility. *Management Science,* 41, 23-30.
Brachinger, H. W., Weber, M. (1997). Risk as a primitive: A survey of measures of perceived risk. *OR Spektrum*, 19, 235-250.
Coombs, C. H. (1975). Portfolio theory and the measurement of risk. W: M. F. Kaplan, S. Schwartz (red.), *Human judgment and decision process* (s. 63-68). New York: Academic Press.
Coombs, C. H., Bowen, J. N. (1971). A test of VE-theories of risk and the effect of the Central Limit Theorem. *Acta Psychologica*, 35, 15-28.
Coombs, C. H., Huang, L. (1970). Test of a portfolio theory of risk preference. *Journal of Experimental Psychology,* 85, 23-29.
Coombs, C. H., Lehner, E. P. (1981). Evaluation of two alternative models of a theory of risk: I. Are moment of distributions useful in assessing risk? *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance,* 7, 1110-1123.
Coombs, C. H., Lehner, E. P. (1984). Conjoint design analysis of the bilinear model: an application to judgments of risk. *Journal of Mathematical Psychology,* 28, 1-42.
Edwards, W. (1954). The theory of decision making. *Psychological Bulletin*, 51, 380-417.
Edwards, W. (1962). Subjective probabilities inferred from decisions. *Psychological Review*, 69, 109-135.
Englander, T., Farago, K., Slovic, P., Fischhoff, B. (1986). A comparative analysis of risk perception in Hungary and the United States. *Social Behavior*, 1, 55-66.
Goszczyńska, M., Tyszka, T., Slovic, P. (1991). Risk perception in Poland: A comparison with three other countries. *Journal of Behavioral Decision Making,* 4, 179-193.
Huang, L. (1971). The expected risk function. *Michigan Mathematical Psychology Program Report*, 71-6 (publikacja

wewnętrzna University of Michigan, Ann Arbor).
Jia, J., Dyer, J. S. (1996). A standard measure of risk and risk-value models. *Management Science,* 42, 1691-1705.
Jia, J., Dyer, J. S., Butler, J. C. (1999). Measure of perceived risk. *Management Science,* 45(4), 519-532.
Kahneman, D., Tversky, A. (1979). Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica*, 47, 263-291.
Keller, L. R, Sarin, R. K., Weber, M. (1986). Empirical investigation of some properties of the perceived riskiness of gambles. *Organizational Behavior and Human Decision Process*, 38, 114-130.
Lopes, L. L. (1990). Re-modeling risk aversion: A comparison of Bernoullian and rank dependent value approaches. W: G. M. von Fuerstenberg (red.), *Acting under uncertainty: Multidisciplinary conceptions* (s. 267-299). Boston: Kluwer.
Lopes, L. L. (1996). When time is of the essence: Averaging, aspiration and the short run. *Organizational Behavior and Human Decision Process*, 65, 179-189.
Luce, R. D. (1980). Several possible measures of risk. *Theory and Choice*, 12, 217-228.
Luce, R. D. (1981). Corrections to several possible measures of risk. *Theory and Choice*, 13, 381.
Luce, R. D., Weber, E. U. (1986). An axiomatic theory of conjoint, expected risk. *Journal of Mathematical Psychology*, 30, 188-205.
Markowitz, M. M. (1959). *Portfolio selection*. New York: Wiley.
Mellers, B. A., Chang, S. (1994). Representations of risk judgment. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 57, 167-184.
Mellers, B. A., Ordonez, L. D., Birnbaum, M. H. (1992). A change-of-process theory for contextual effects and preferences reversals in risky decision making. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 52, 331-369.
Quiggin, J. (1982). A theory of anticipated utility. *Journal of Economic Behavior and Organization,* 3, 324-345.
Sarin, R. K., Weber, M. (1993). Risk-value models. *European Journal of Operational Research,* 70, 135-149.
Shapira, Z. (1994). *Risk taking: A managerial perspective.* New York: Russell Sage Foundation.
Sokołowska, J. (2000). Ryzyko: wyzwanie czy zagrożenie. Psychologiczne modele oceny i akceptacji ryzyka. Warszawa: Wydawnictwo Instytutu Psychologii PAN.
Sokołowska, J., Pohorille, A. (2000). Models of risk and choice: Challenge or danger. *Acta Psychologica*, 104, 339-369.
Sokołowska, J., Świątnicki, K. (2000). The dimensional model of risk perception. W: E. Holtz (red.), *Fairness and Cooperation. The IAREP/SABE Joint Meeting Proceedings*. Baden/Viena, Austria.
Sokołowska, J., Świątnicki, K. (2001). Jak ludzie składają informacje o prawdopodobieństwie i wartości wyniku przy ocenie ryzyka. *Studia Psychologiczne*, 39, 1, 161-179.
Sokołowska, J., Tyszka, T. (1995). Perception and acceptance of technological and environmental hazards. *Risk Analysis*, 15, 6, 733-743
Teigen, K. H., Brun, W., Slovic, P. (1988). Societal risk as seen by a Norwegian public'. *Journal of Behavioral Decision Making,* 1, 111-130.
Tversky, A., Kahneman, D. (1992). Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty. *Journal of Risk and Uncertainty*, 5, 297-323.
Weber, E. U., Anderson, C., Birnbaum, M. H. (1992). A theory of perceived risk and attractiveness. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 52, 492-523.
Weber, E. U., Bottom, W. P. (1989). Axiomatic measures of perceived risk: some tests and extensions. *Journal of Behavioral Decision Making*, 2, 2, 113-131.
Weber, E. U., Bottom, W. P. (1990). An empirical test of the transitivity, monotonicity, accounting, and conjoint axioms for perceived risk. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 45, 253-275.

ANEKS 1
ZGODNOŚĆ MODELU POTĘGOWEGO LUCE'A I EKSPONENCJALNEGO SARINA Z WŁASNOŚCIAMI MULTIPLIKATYWNOŚCI I ADDYTYWNOŚCI

Rozważmy najpierw własność multiplikatywności. Załóżmy, że mamy dwie loterie X_1 i X_2, przy czym X_1 jest bardziej lub równie ryzykowna niż X_2:

$R(X_1) \geq R(X_2)$(A 1.1)

Przyjmijmy następnie, że obie loterie są mnożone prze stałą α, większą od 1. Aby spełniona była własność multiplikatywności loteria X_1, musi pozostać bardziej ryzykowna. Czyli:

$R(\alpha X_1) \geq R(\alpha X_2)$.(A 1.2)

Wykażemy, że własność ta zachodzi dla modelu Luce'a. Rozważmy pierwszą loterię:

$R(X_1) = B_+(p_w * a_w^\theta) + B_-(p_l * |a_l|^\theta)$.(A 1.3)

Po pomnożeniu wszystkich wyników przez α otrzymujemy:

$R(\alpha X_1) = B_+(p_w * (\alpha a_w)^\theta) + B_-(p_l * (\alpha a_l)^\theta)$.

Następnie wykorzystujemy własność funkcji potęgowej:

$(\alpha a_l)^{\theta} = \alpha^{\theta} * a_l^{\theta}$,

wtedy:

$R(\alpha X_1) = B_+(p_w * \alpha^{\theta} * a_w^{\theta}) + B_-(p_l * \alpha^{\theta} * a_l^{\theta})$.

Po wyciągnięciu α przed nawias, otrzymujemy:

$R(\alpha X_1) = \alpha^{\theta}[B_+(p_w * a_w^{\theta})] + B_-(p_l * a_l^{\theta})]$.

Kiedy porównamy to równanie z równaniem (A 1.3), łatwo zauważyć, że zapis w nawiasie jest zapisem ryzykowności oryginalnej loterii X_1, czyli:

$R(\alpha X_1) = \alpha^{\theta} * R(X_1)$.(A 1.4)

Identyczne rozumowanie można przeprowadzić dla loterii X_2. Wtedy otrzymujemy:

$R(\alpha X_2) = \alpha^{\theta} * R(X_2)$.(A 1.5)

Podstawiając (A 1.4) i A (1.5) do nierówności (A 1.2) otrzymamy:

$\alpha^{\theta} * R(X_1) \geq \alpha^{\theta} * R(X_2)$.

Ponieważ wyrażenie α^{θ} jest identyczne po obu stronach nierówności, można je zredukować. Wtedy otrzymamy nierówność (A 1.1). Oznacza to, że model potęgowy Luce'a spełnia własność multiplikatywności.
Przejdziemy teraz do własności addytywności. Załóżmy, tak jak poprzednio, że mamy dwie loterie X_1 i X_2, oraz że X_1 jest bardziej ryzykowna niż X_2, czyli obowiązuje nierówność (A 1.1). Tym razem przyjmijmy, że do obu loterii dodajemy dodatnią stałą β. Własność addytywności oznacza, że po tej transformacji loteria X_1 pozostaje bardziej ryzykowna niż X_2, czyli:

$R(X_1 + \beta) \geq R(X_2 + \beta)$.(A 1.6)

Własność ta jest spełniona przez model eksponencjalny Sarina, podany w Równaniu (34). W swoim oryginalnym sformułowaniu model ten, w przeciwieństwie do modelu Luce'a, nie przeprowadzał separacji wyników negatywnych i pozytywnych. Jednak jego późniejsze interpretacje odwołują się do takiego rozróżnienia (Brachinger, Weber, 1997). Wykazujemy tutaj, że wprowadzenie do tego modelu rozróżnienia między wynikami pozytywnymi i negatywnymi bez pogwałcenia własności addytywności jest możliwe przy pewnych ograniczeniach. Ryzyko dla loterii X_1 zapisujemy jako:

$R(X_1) = K_1 * (p_w * e^{c*aw}) + K_2 * (p_l * e^{c*al})$,(A 1.7)

gdzie p_w i p_l oznaczają prawdopodobieństwo wyników pozytywnych i pozytywnych, a a_l i a_w – odpowiednie wypłaty.
Po dodaniu stałej β do a_l i a_w otrzymujemy

$R(X_1 + \beta) = K_1 * (p_w * e^{c(aw+\beta)}) + K_s * (p_l * e^{c(al+\beta)}) =$
$= K_1 * (p_w * e^{caw+c\beta}) + K_s * (p_l * e^{cal+c\beta})$.

Korzystając z własności funkcji eksponencjalnej:

$e^{a+b} = e^a * e^b$

otrzymujemy:

$R(X_1 + \beta) = K_1 * (p_w * e^{caw} * e^{c\beta}) + K_2 * (p_l * e^{cal} * e^{c\beta})$.(A 1.8)

Po wyciągnięciu przed nawias po prawej stronie wspólnego czynnika $e^{c\beta}$ równanie przyjmuje postać:

$R(X_1 + \beta) = e^{c\beta}[K_1 * (p_w * e^{caw}) + K_2 * (p_l * e^{cal})]$.

Na podstawie porównania z równaniem (A 1.7) wyrażenie w nawiasie opisuje ryzykowność oryginalnego zakładu X_1, czyli:

$R(X_1 + \beta) = e^{c\beta} R(X_1)$.(A 1.9)

Jeśli przeprowadzimy takie samo równanie dla loterii X_2, to otrzymamy:

$R(X_2 + ß) = e^{cβ}R(X_2)$.(A 1.10)

Podstawiając równania (A 1.9) i (A 1.10), które opisują ryzykowność transformowanych zakładów do Równania (A 1.6), otrzymujemy nierówność:

$e^{cβ}R(X_1) \geq e^{cβ}R(X_2)$.

Dodatnia wielkość $e^{cβ}$ może być zredukowana po obu stronach tej nierówności, co prowadzi do początkowo założonej nierówności (A 1.1). Oznacza to, że model Sarina spełnia własność addytywności.
Należy zwrócić uwagę, że stała c w tym modelu musi być ta sama dla wyników pozytywnych i negatywnych. W przeciwnym przypadku nie byłoby możliwe wyciągniecie przez nawias wspólnego czynnika w równaniu (A 1.8). Oznacza to, że tylko stała K, ale nie c, może być różna dla wyników pozytywnych i negatywnych.